建筑工程与管理 · 2024 第6卷 第8期
Architecture Engineering and Management.2024,6(8)

基于分布塑性模型钢框架极限承载力分析

廖艺菲 黎 哲* 陆华森
广西交通职业技术学院，广西 南宁 530023

[摘要]随着钢结构行业的发展，如何有效防止其发生破坏已成为一个亟待解决的难题。文中采用 QR 法对钢框架进行极限承载力计算，基于分布塑性模型模拟杆件塑性扩展，分析钢框架失效模式并编制相应 C 语言计算程序，为该类钢框架设计提供了参考依据。

[关键词]钢框架；分布塑性模型；极限承载力；QR 法
DOI：10.33142/aem.v6i8.13229　　中图分类号：TU391.5　　文献标识码：A

Analysis of Ultimate Bearing Capacity of Steel Frame Based on Distributed Plasticity Model

LIAO Yifei, LI Zhe *, LU Huasen
Guangxi Transport Vocational and Technical College, Nanning, Guangxi, 530023, China

Abstract: With the development of the steel structure industry, how to effectively prevent its damage has become an urgent problem to be solved. In this paper, the QR method is used to calculate the ultimate bearing capacity of steel frames, and the plastic extension of members is simulated based on the distributed plastic model. The failure mode of steel frames is analyzed and corresponding C language calculation programs are developed, providing a reference for the design of such steel frames.

Keywords: steel frame; distributed plasticity model; ultimate bearing capacity; QR method

引言

极限承载力是结构设计重要指标之一。结构极限承载力分析方法包括弹塑性增量法（EPIA）[1]、数学规划法（EMA）[2]和弹性模量调整法（EMAP）[3]。EPIA 正确性得到了实验结果的验证[4]，然而，EPIA 计算原理复杂、计算效率不高。

鉴于此，本文采用层纤维模型在截面高度方向划分很多纤维层，考虑轴力-弯矩相关性，根据材料应力—应变曲线确定相应的应力。[5]采用三段式线性分布刚度模型[6-7]考虑塑性沿杆长方向的扩展。采用 QR 法对钢框架进行极限承载力计算，模拟杆件塑性扩展并分析钢框架失效模式，为该类钢框架设计提供了参考依据。

1 塑性发展

1.1 塑性沿截面高度发展

假定截面变形符合平截面假定，截面屈服首先从杆端向中间扩展，钢材采用理想弹塑性模型，仅考虑轴力和弯矩的相关性。采用纤维模型离散，即将截面沿变形高度划分为若干水平条带，可以用数组先记录每个条带中型钢的面积 A_i 及相应的高度 y_i。[8]

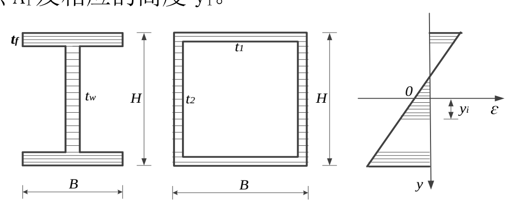


图 1 截面条带划分及应变图

条带应变计算 ε_i：

$$\varepsilon_i=\varepsilon_N+\varphi y_i \tag{1}$$

其中，轴力产生的轴向应变为 ε_i。条带的坐标为 y_i，截面弯曲变形产生的曲率为 φ。将应变 ε_i 代入式（2）即可求出应力。

$$\sigma_s=\begin{cases}E_s\varepsilon & \varepsilon\le\varepsilon_s\\ f_y & \varepsilon>\varepsilon_s\end{cases} \tag{2}$$

离散后条带产生轴力 N 和弯矩 M，须满足平衡方程：

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i A_i=N \qquad \sum_{i=1}^{n}\sigma_i A_i y_i=M \tag{3}$$

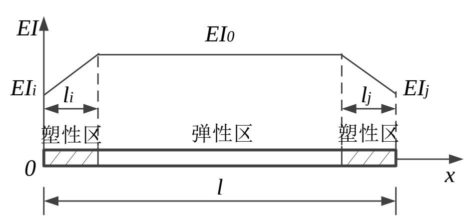
采用瞬时割线刚度模拟截面刚度变化：

$$EI=\frac{M}{\varphi},\qquad EA=\frac{N}{\varepsilon_N} \tag{4}$$

求出应变 ε_N 和曲率 φ 即可求解截面的瞬时刚度。

1.2 塑性沿杆长方向发展

传统的平面钢框架塑性分析采用集中塑性铰模型，假定塑性变形集中在杆件单元的两端，而中间部分仍视为弹性，此种模型显然与客观事实不相符。考虑塑性沿杆件长度的扩展变化，本文基本三段式分布刚度模型，推导了结构在弹塑性阶段的单元刚度矩阵。



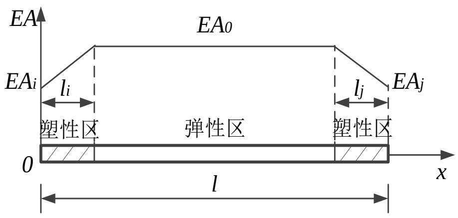


图 2 三段式分布刚度模型

由最小势能原理，梁应变能：

$$U^e=\frac{1}{2}\int_V\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dV=\frac{1}{2}\sum\left(\{\delta\}^{eT}[k]^e\{\delta\}^e\right) \tag{8}$$

其中：

$$[k]^e=\int_V[B]^T D(x)[B]dV \qquad D(x)=\begin{bmatrix}EA(x) & 0\\ 0 & EI(x)\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{6}{l^2}+\frac{12x}{l^3} & -\frac{4}{l}+\frac{6x}{l^2} & 0 & \frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3} & -\frac{2}{l}+\frac{6x}{l^2}\end{bmatrix} \tag{10}$$

得到单元弹塑性刚度矩阵：

$$[K]^e=\begin{bmatrix}\frac{EA\phi_0}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI\phi_1}{L^3} & & & 对称 & \\ 0 & \frac{6EI\phi_2}{L^2} & \frac{4EI\phi_3}{L} & & & \\ -\frac{EA\phi_0}{L} & 0 & 0 & \frac{EA\phi_0}{L} & & \\ 0 & -\frac{12EI\phi_1}{L^3} & -\frac{6EI\phi_2}{L^2} & 0 & \frac{12EI\phi_1}{L^3} & \\ 0 & \frac{6EI\phi_4}{L^2} & \frac{2EI\phi_5}{L} & 0 & -\frac{6EI\phi_4}{L^2} & \frac{4EI\phi_6}{L}\end{bmatrix} \tag{11}$$

令 $w_1=\frac{EI_i}{EI_0}$，$w_2=\frac{EI_j}{EI_0}$，$\lambda_1=\frac{l_i}{l}$，$\lambda_2=\frac{l_j}{l}$，$\alpha_1=\frac{EA_i}{EA_0}$，$\alpha_2=\frac{EA_j}{EA_0}$，可得：

$$\begin{aligned}
\phi_0&=1-(1-\alpha_1)\frac{\lambda_1}{2}-(1-\alpha_2)\frac{\lambda_2}{2}\\
\phi_1&=1-(1-w_1)\lambda_1(\lambda_1^2-2\lambda_1+\frac{3}{2})-(1-w_2)\lambda_2(\lambda_2^2-2\lambda_2+\frac{3}{2})\\
\phi_2&=1-(1-w_1)\lambda_1(\lambda_1^2-\frac{7}{3}\lambda_1+2)-(1-w_2)\lambda_2(\lambda_2^2-\frac{5}{3}\lambda_2+1)\\
\phi_3&=1-(1-w_1)\lambda_1(\frac{3}{4}\lambda_1^2-2\lambda_1+2)-(1-w_2)\lambda_2(\frac{3}{4}\lambda_2^2-\lambda_2+\frac{1}{2})\\
\phi_4&=1-(1-w_1)\lambda_1(\lambda_1^2-\frac{5}{3}\lambda_1+1)-(1-w_2)\lambda_2(\lambda_2^2-\frac{7}{3}\lambda_2+2)\\
\phi_5&=1-(1-w_1)\lambda_1(\frac{3}{2}\lambda_1^2-3\lambda_1+2)-(1-w_2)\lambda_2(\frac{3}{2}\lambda_2^2-3\lambda_2+2)\\
\phi_6&=1-(1-w_1)\lambda_1(\frac{3}{4}\lambda_1^2-\lambda_1+\frac{1}{2})-(1-w_2)\lambda_2(\frac{3}{4}\lambda_2^2-2\lambda_2+2)
\end{aligned} \tag{12}$$

λ_1、λ_2 分别表示梁柱单元两端塑性区扩展长度与杆长之比，w_1、w_2 分别为梁柱单元起点 i 与终点 j 抗弯刚度与初始刚度比值，α_1、α_2 分别为梁柱单元起点 i 与终点 j 抗拉刚度与初始刚度比值，刚度矩阵中七个参数（ϕ_0~ϕ_6）体现塑性沿杆长扩展。当七个参数（ϕ_0~ϕ_6）值趋向于 1，梁柱单元处于弹性阶段。

2 塑性判断

本文采用 M-N 相关曲线来评估截面的极限状态，截面应变达到 $\varepsilon_e=\sigma/E$，弯矩达到弹性极限弯矩 M_e 时，截面最外侧纤维的应力达到材料屈服点，截面部分进入塑性状态；截面应变达到极限应变 ε_u，弯矩达到极限弯矩 M_p 时，截面大部分或全部材料进入塑性，出现塑性铰。

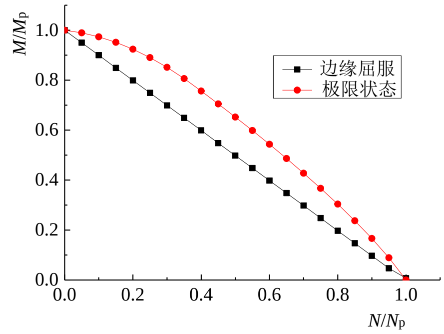


图 3 截面 M-N 相关曲线

3 QR 法

3.1 QR 法样条离散及位移插值函数

QR 法的第一步是进行单元分析，即假想把钢框架在 x 方向及 y 方向进行样条节点离散化，用三次 B 样条基函数的乘积的线性组合构造位移插值函数。[9]结构整体位移函数表示为：

$$\begin{aligned}
u&=\sum_{m=1}^{R}\sum_{i=0}^{N}\phi_i(x)a_{im}X_m(y)=\sum_{m=1}^{R}[\phi(x)]\{a\}_m X_m(y)\\
v&=\sum_{m=1}^{R}\sum_{i=0}^{N}\phi_i(x)b_{im}Y_m(y)=\sum_{m=1}^{R}[\phi(x)]\{b\}_m Y_m(y)\\
\theta&=\sum_{m=1}^{R}\sum_{i=0}^{N}\phi_i(x)c_{im}H_m(y)=\sum_{m=1}^{R}[\phi(x)]\{c\}_m H_m(y)
\end{aligned} \tag{13}$$

式中，$X_m(y)$、$Y_m(y)$、$H_m(y)$ 为反映高度方向变形规律形函数。x 方向、y 方向分别采用样条基函数对样条结点，正交多项式进行样条离散。

$$\phi_i(x_k)=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases} \tag{14}$$

$$X_m(y)=Y_m(y)=H_m(y)=\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\frac{(m+n)!}{(m-n)!(n+1)!(n-1)!}\left(\frac{y}{H}\right)^n \tag{15}$$

其中，H 为结构高度。式（7）满足框架边界条件，不需要对边界条件进行修正。整体位移函数建立任意点（x，y）与真实位移（u，v，θ）与样条广义位移 $\{\delta\}$ 之间关系，则用矩阵形式描述 QR 法整体位移函数：

$$\{u\}=[N]\{\delta\} \tag{16}$$

式中：

$$\{U\}=\{u \quad v \quad \theta\}^T,\ \{\delta\}=\left\{\{\delta\}_1^T,\{\delta\}_2^T,\cdots,\{\delta\}_R^T\right\}$$
$$\{\delta\}_m=\left\{\{\delta\}_{0m}^T,\{\delta\}_{1m}^T,\cdots,\{\delta\}_{Nm}^T\right\},\ \{\delta\}_{im}=\{a_i,b_i,c_i\}_m^T$$
$$(m=1,2,\cdots,R;\ i=0,1,2,\cdots,N) \tag{17}$$

其中，QR 法基本未知量样条节点广义位移$\{\delta\}$是一个$3R(N+1)$阶向量，仅与样条结点数N，级数项R有关。

3.2 QR 变换及结构刚度方程的建立

QR 法计算步骤如下：

整体坐标下的单元刚度矩阵和荷载向量为[9]：

$$[k]_g^e=[T]_e^T[k]_e[T]_e \qquad \{f\}_g^e=[T]_e^T\{f\}_e \tag{18}$$

单元总势能泛函：

$$\Pi_e=\frac{1}{2}\{V\}_e^T[T]_e^T[k]_e\{V\}_e-\{V\}_e^T[T]_e^T\{f\}_e \tag{19}$$

其中，单元结点位移向量$\{V\}_e$表示为：

$$\{V\}_e=\{u_A \quad v_A \quad \theta_A \quad u_B \quad v_B \quad \theta_B\}^T \tag{20}$$

从而得到单元结点位移与 QR 法广义位移关系为：

$$\{V\}_e=[N_e]\{\delta\}=\begin{bmatrix}[N]_i\\ [N]_j\end{bmatrix}\{\delta\} \tag{21}$$

$[N_e]$为单元形函数矩阵，$[N]_i$、$[N]_j$为单元左右结点形函数矩阵。

结构总势能泛函：

$$\Pi=\sum_{e=1}^{M}\Pi_e=\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{M}\{V\}_e^T[k]_e\{V\}_e-\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{M}\{V\}_e^T\{f\}_e \tag{22}$$

其中：

$$[\bar{K}]_e=[N_e]^T[T]_e^T[k]_e[T][N_e],\ \{\bar{f}\}_e=[N_e]^T[T]_e^T\{f\}_e \tag{23}$$

利用变分原理可得离散化刚度方程：

$$[K]\{\delta\}=\{F\} \tag{24}$$

式中$[K]$及$\{f\}$为刚度方程及荷载向量，即：

$$[K]=\sum_{e=1}^{M}[K]_e,\quad f]=\sum_{e=1}^{M}[F]_e \tag{25}$$

装配总刚矩阵时不需要先进行扩张，可以直接进行叠加。

4 钢框架极限承载力分析

钢框架承载力计算步骤如下：

（1）输入 QR 法结构离散数据如结点坐标、梁柱单元划分信息、荷载信息、样条结点数 N、级数项 R 等。

（2）计算弹性单元刚度矩阵，按式（18）的内容进行 QR 变换并装配到总刚中的对应位置形成 QR 法总刚矩阵。一次施加全部荷载{P}进行线弹性分析，求杆端弯矩与弹性极限弯矩之比的最大值$\lambda_0=\max(M/M_e)$，相应参考荷载向量为$\lambda_0\{P\}$。

（3）不平衡结点力计算，根据当前内力和荷载向量计算时不平衡结点力。

（a）计算结构荷载增量$\{\Delta P_i\}$。计算单元等效结点荷载向量[1]，再进行 QR 变换，装配形成 QR 法总荷载向量，再将荷载划分为若干步，第 i 级荷载向量的增量$\{\Delta P_i\}=\Delta\lambda\{P\}$。

（b）采用层纤维模型根据压弯耦合求解塑性沿截面高度的扩展，计算单元刚度矩阵所需的参数λ_1、λ_2、w_1、w_2、α_1、α_2。

（c）计算结构总刚矩阵$[K_i]$。采用式（10）弹塑性刚度矩阵，形成有限元法单元刚度矩阵后按式（18）的内容进行 QR 变换并装配到总刚中的对应位置形成 QR 法总刚矩阵。

（d）求解刚度方程$[K_i]\{\Delta\delta_i\}=\{\Delta P_i\}$，根据 QR 法的广义位移增量计算结点的位移增量$\{\Delta\delta_i\}$，计算各单元的内力增量$\{\Delta F_i\}$。

（e）杆端截面塑性区域的判断，根据 M-N 相关曲线判定是否出现塑性区域，若塑性开展到一定程度，将连接转动刚度置 0。

（f）更新结点的当前位移、单元内力及加载参数。

（4）重复步骤（3），若总刚度矩阵行列式值小于零，则认为结构处于极限承载状态，程序结束，否则继续下一步加载。

5 算例分析

算例 如图 4 所示钢框架，梁、柱弹性模量 $E=2.1\times10^5$MPa，梁截面面积和惯性矩分别为 $A_b=0.3\times0.4m^2$，$I_b=1.6\times10^{-3}m^2$，屈服应力 200MPa；柱截面面积和惯性矩分别为 $A_c=0.35\times0.35m^2$，$I_c=1.2505\times10^{-3}m^2$，屈服应力 300Mpa，外荷载 F=500kN，α为荷载比例系数，塑性区出现顺序如图 4 所示。

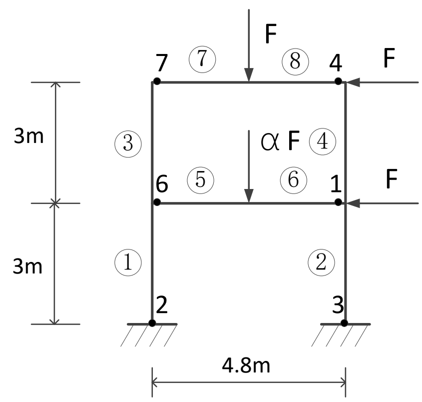


图 4 钢框架几何尺寸、受荷情况及塑性区出现顺序

表 1 不同方法计算结果

α	EPIA[10]	EMRM[10]	QR	与 EPIA 误差%
1	3.540	3.510	3.492	1.36
2	3.027	2.983	3.021	0.20
3	2.581	2.544	2.578	0.12
4	2.047	1.987	2.066	-0.93
5	1.636	1.582	1.650	-0.86

表 2 梁单元计算数据

	杆件 6 右截面			杆件 8 右截面		
荷载	EA_s/EA_0	EI_s/EI_0	塑性区	EA_s/EA_0	EI_s/EI_0	塑性
0.2	1	1	0	1	1	0
0.3	1	1	0	1	1	0
0.4	0.996	0.972	0.107	1	1	0
0.45	0.975	0.861	0.181	1	1	0
0.5	0.931	0.702	0.240	1	1	0
0.532	0.892	0.593	0.272	1	1	0
0.602	0.892	0.593	0.272	0.999	0.993	0.047
0.702	0.892	0.593	0.272	0.966	0.832	0.154
0.752	0.892	0.593	0.272	0.930	0.703	0.195
0.787	0.892	0.593	0.272	0.897	0.610	0.225
0.855	0.892	0.593	0.272	0.897	0.610	0.225
0.873	0.892	0.593	0.272	0.897	0.610	0.225

从表 1 不同方法计算结果可知，QR 法计算结果与较为精确的 EIAP 误差较小，但 EPIA 需要划分 96 个单元才能使结果趋于稳定，EMRM 需要划分 16 个单元，本文 QR 法仅需划分 8 个单元便能获得较高的精度。观察表 2 可知，随着塑性发展，杆件抗压刚度 EA 及抗弯刚度 EI 不断下降，塑性区域开始逐渐扩展。当塑性发展到一定阶段形成塑性铰，塑性区域也不再扩展。

6 结语

本文考虑塑性沿截面高度及杆长方向发展，推导了弹塑性单元刚度矩阵，建立了基于层纤维模型和三段式分布刚度模型的钢框架极限承载力计算格式，编制了计算程序。理论研究及计算结果表明：

（1）利用 QR 法对钢框架进行极限承载力分析，计算简单，程序容易实现。

（2）本文采用层纤维模型描述塑性沿截面高度开展，采用三段式分布刚度模型描述塑性沿杆长方向扩展。本文程序不仅具备全面评估钢框架整体承载能力，还可以局部评估塑性发展，为寻求结构的薄弱层位置提供设计依据。

基金项目：2021 年度广西高校中青年教师基础能力提升项目（2021KY1133）；2023 年度广西高校中青年教师基础能力提升项目（2023KY1175）；2024 年度广西高校中青年教师基础能力提升项目（2024KY1168）。

[参考文献]

[1]Zhang H,DesRoches R,Yang Z,et al.Experimental and analytical studies on a streamlined steel box girder[J].Journal of Constructional Steel Research,2010,66(7):906-914.

[2]Yan D.Chang C.Vulnerability assessment of single-pylon cable-stayed bridges using plastic limit analysis [J]. Engineering Structures, 2010,32(8):2049-2056.

[3]杨绿峰,宋沙沙,解威威,等.框架结构箱型构件的通用齐次广义屈服函数[J].西南交通大学学报,2020,55(3):476-484.

[4]欧伟,张伟,冯瑛琪,李琦,杨绿峰.箱型截面的齐次广义屈服函数与结构极限承载力[J].华南理工大学学报(自然科学版),2014,42(6):96-101.

[5]杨绿峰,李琦,张伟,等.圆管截面齐次广义屈服函数与结构极限承载力[J].计算力学学报,2013,30(5):693-698.

[6]王连坤,张俊峰,郝际平.空间钢框架高等分析的塑性区方法研究[J].钢结构,2010,25(9):1-4.

[7]郑廷银,张玉.空间钢框架结构的改进塑性区模型[J].钢结构,2005(1):7-10.

[8]廖艺菲.平面半刚接钢框架随机稳定承载力分析的 QR 法[D].广西:广西大学,2019.

[9]李秀梅,秦荣.半刚性连接钢框架二阶弹塑性稳定分析的 QR 法[J].工程力学学,2013,30(3):1-7.

[10]刘敬敏.结构失效模式识别和体系可靠度分析的无路径依赖性方法研究[D].广西:广西大学,2017.

作者简介：廖艺菲（1992.7—），毕业院校：广西大学，所学专业：结构工程，当前就职单位：广西交通职业技术学院，职务：专职教师，职称级别：工程师；*通信作者：黎哲（1993—），女，硕士，工程师，主要研究方向为结构设计。