

简支矩形压电薄板弯曲的解析解

胡敬伟 刘耕墨

北京城建亚泰建设集团有限公司, 北京 100013

[摘要] 基于薄板小挠度弯曲理论, 忽略平面内电场强度, 推导了压电板弯曲的平衡方程, 分别采用 Navier 和 Levy 解法, 获得了四边简支矩形压电薄板位移、应力和电势的解析表达式, 数值算例表明两种解析方法所得结果一致。研究了厚度对压电矩形薄板弯曲特性的影响, 对比不同压电材料矩形薄板弯曲特性, 分析了压电板位移和电势与其材料参数之间的关系。

[关键词] 压电材料; 薄板弯曲理论; 解析解

DOI: 10.33142/ec.v6i8.9142

中图分类号: TU311

文献标识码: A

Analytical Solution of Simply supported Rectangular Piezoelectric Thin Plate

HU Jingwei, LIU Gengmo

Beijing Urban Construction Yatai Group Co., Ltd, Beijing, 100013, China

Abstract: Piezoelectric plate bending equilibrium equation is derived based on the thin plate bending theory and ignoring in-plane electric field. Navier and Levy methods are used to obtain the analytical expressions of a simply supported rectangular piezoelectric plate displacement, stress and electric potential. Numerical examples show that the results by two different analytical methods are consistent. The effect of piezoelectric rectangular thin plate thickness on bending behavior is also studied. The relation between material parameters and displacement as well as electric potential of piezoelectric plate are analyzed by comparing the bending properties of different piezoelectric material plate.

Keywords: piezoelectric material; thin-plate bending theory; analytical solution

压电材料因具有正逆压电效应, 能够实现机械能和电能之间的相互转换, 使得其在工程中的应用范围不断扩大, 由最初用于军事上的压电水下超声换能器, 发展到压电超声波马达、压电变压器、医疗上的声辐射力脉冲成像 (ARFI) 和高强度聚焦超声 (HIFU) 治疗技术^[1], 以及航空航天中大型柔性空间结构的静动态形状控制和土木工程中的结构损伤检测等应用。如何精确而有效的分析压电材料复杂的力-电耦合行为, 准确描述压电智能结构中的位移场、力场和电场, 一直是压电研究和智能结构应用中必须解决的重要问题。

近年来, 国内外许多学者对压电材料的机电耦合特性进行了广泛的研究: Ray 等人^[2]提出了压电板柱弯曲的精确模型, 获得了简支边界条件压电板的解析解。Cheng 等^[3]从三维弹性理论出发, 获得了带有压电层正

交柱壳的精确解。Wang 等^[4]利用状态变量法, 建立了具有不同材料特性压电介质问题的状态变量模型, 获得了空间轴对称问题的状态变量解^[5]和多层磁-电-弹性板的状态变量解^[6], 建立了粘贴和埋置压电电压磁致动器和传感器层合结构自由振动的状态变量公式^[7]。刘正兴^[8]、林启荣^[9]等基于压电弹性介质的二维本构关系, 获得了压电层合弹性梁的解析解。丁皓江和江爱民从压电平面应变问题的通解出发, 利用调和多项式的显式表达式, 结合试凑法获得了压电梁的一系列精确解和典型问题的解析解^[10-11]。

黄德进等^[12]通过构造应力函数法, 得到了均布荷载作用下两端固支正交各向异性梁的应力和位移的解析解。文献^[13]在辛几何空间内给出了压电组合板得解析解。本文忽略平面内电场强度, 基于经典薄板弯曲理论, 推导了线弹性压电薄板弯曲的平衡方程, 分别采用经典弹性力中

Navier 和 Levy 解法, 获得了四边简支矩形薄板弯曲位移、应力和电势的解析表达式。

1 基本公式推导

线弹性压电本构方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 分别是应力、应变、电位移、电场矢量; \mathbf{C} 、 \mathbf{e} 、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为弹性、压电、介电系数矩阵。对于横向均质压电弹性体, 将式 (1.1) 展开为

$$\begin{cases} \sigma_x = c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z \\ \sigma_y = c_{12}\varepsilon_x + c_{11}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z \\ \sigma_z = c_{13}\varepsilon_x + c_{13}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z - e_{33}E_z \\ \tau_{xz} = c_{44}\gamma_{xz} - e_{15}E_y \\ \tau_{yz} = c_{44}\gamma_{yz} - e_{15}E_x \\ \tau_{xy} = c_{66}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} D_x = e_{15}\gamma_{yz} + \epsilon_{11} E_x \\ D_y = e_{15}\gamma_{xz} + \epsilon_{11} E_y \\ D_z = e_{31}\epsilon_x + e_{31}\epsilon_y + e_{33}\epsilon_z + \epsilon_{33} E_z \end{cases} \quad (1.3)$$

其中,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad r_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ r_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad r_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

u 、 v 、 w 分别为弹性体在 x 、 y 、 z 方向的位移。不计体力时压电弹性体的平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

由薄板小挠度弯曲假定^[14]可知, w 仅为 x 、 y 的函数, 且

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1.7)$$

忽略薄板平面内的电场, 即

$$E_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad E_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.8)$$

ϕ 为电势, 薄板的弯矩可由应力表示为

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (1.9)$$

其中, h 为板的厚度, 设作用在板上的横向荷载为 $p(x, y)$, 薄板小挠度弯曲平衡方程为:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = p(x, y) \quad (1.10)$$

将 (1.4)、(1.6) ~ (1.8) 代入 (1.2) 和 (1.3) 可得

$$\begin{cases} \sigma_x = c_{11}(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + c_{12}(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \sigma_y = c_{12}(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + c_{11}(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \tau_{xy} = -2c_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1.11)$$

$$D_z = -e_{31} z \nabla^2 w - \epsilon_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.12)$$

其中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 将式(1.12)代入平衡方程(1.5)

中第四式并对 z 积分可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} z \nabla^2 w + \phi_1(x, y) \quad (1.13)$$

式中, $\phi_1(x, y)$ 为外力作用下板厚度方向上压电效应产生的电场。将式 (1.11)、(1.13) 代入 (1.9) 可获得板弯矩的位移分量表达式

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = -\frac{h^3}{12} \left(c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \nabla^2 w \right) \quad (1.14)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz = -\frac{h^3}{12} \left(c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \nabla^2 w \right) \quad (1.15)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz = -\frac{h^3}{12} \left(2c_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.16)$$

将式(1.14)~(1.16)代入板的弯曲平衡方程(1.10),

并由横观各项同性材料参数关系 $c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$, 得位移表达的压电板弯曲平衡方程:

$$\frac{h^3}{12} (c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y) \quad (1.17)$$

令压电板的等效弯曲刚度 $D_p = \frac{h^3}{12} (c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}})$, 即

$$D_p \nabla^4 w = p(x, y) \quad (1.18)$$

长宽分别为 a 、 b 的四边简支矩形板边界条件为

$$\begin{cases} (w)_{x=0,a} = 0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0,a} = 0 \\ (w)_{y=0,b} = 0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0,b} = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

考虑闭环短路电边界条件, 即

$$\phi(x, y, \pm h/2) = 0 \quad (1.20)$$

将式 (1.13) 对 z 积分可得

$$\phi = -\frac{e_{31}}{2\epsilon_{33}} z^2 \nabla^2 w + z \phi_1(x, y) + \phi_0(x, y) \quad (1.21)$$

代入边界条件 (1.20) 可得: $\phi_1(x, y) = 0$,

$\phi_0(x, y) = \frac{e_{31}}{2\epsilon_{33}} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \nabla^2 w$, 因此, 压电薄板内电势的精确解为

$$\phi = -\frac{e_{31}}{2\epsilon_{33}} \left(z^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) \nabla^2 w \quad (1.22)$$

2 简支矩形压电薄板弯曲的 Navier 解

Navier 把四边简支薄板的挠度 w 取为如下满足边界条件形式的三角级数表达式:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.23)$$

其中, m 、 n 为任意正整数。通过 Fourier 级数将平衡方程 (1.18) 右边荷载 $p(x, y)$ 也化为三角级数形式

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (1.24)$$

将式 (1.23)、(1.24) 代入平衡方程 (1.18) 可得:

$$A_{mm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (1.25)$$

$$D_p \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]$$

将式 (1.25) 代入 (1.18) 得压电薄板弯曲挠度的表达式:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (1.26)$$

$$D_p \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]$$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

将式 (1.26) 代入 (1.11)、(1.22) 即可获得压电薄板弯曲应力和电势的 Navier 解的表达式:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \pi^2 z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mm} \left[(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. (c_{12} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}) \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \sigma_y &= \pi^2 z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mm} \left[(c_{12} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. (c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}) \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \tau_{xy} &= -2\pi^2 c_{66} z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mm} \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \phi &= -\frac{e_{31} \pi^2}{2 \epsilon_{33}} \left(z^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mm} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \\ &\quad \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right. \quad (1.27)$$

3 简支矩形压电薄板弯曲的 Levy 解

对于 $x=0$ 及 $x=a$ 两边简支, 其余两边 $y=0$ 及 $y=b$ 为任意边界条件, 承受横向荷载 $p(x, y)$ 的薄板挠度表达式可取为:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1.28)$$

其中, Y_m 是 y 的任意函数, m 为任意整数。显然, 式 (1.28) 满足边界条件 (1.19) 中第一式; 因此, 只要在满足边界 (1.19) 二式条件下, 选择适当的 Y_m 使得 (1.28) 满足压电薄板弯曲平衡方程 (1.18) 即可。将荷载 $p(x, y)$

按 Fourier 级数展开为 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 的级数

$$p(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1.29)$$

将式 (1.28)、(1.29) 代入 (1.18) 可得:

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m = \frac{2}{a D_p} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (1.30)$$

此常微分方程解的表达式可以写成:

$$Y_m = A_m ch \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} sh \frac{m\pi y}{a} + C_m sh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} ch \frac{m\pi y}{a} + f_m(y) \quad (1.31)$$

其中, $f_m(y)$ 为任意一个特解, A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 可由边界条件求得, 则压电薄板挠度表达式为:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m ch \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} sh \frac{m\pi y}{a} + C_m sh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} ch \frac{m\pi y}{a} + f_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1.32)$$

对于四边简支矩形板, 受均布荷载 $p(x, y) = p_0$ 作用时, 可设

$$f_m(y) = \frac{2}{a D_p} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2 p_0 a^4}{(m\pi)^5 D_p} (1 - \cos(m\pi)) \quad (1.33)$$

结合边界条件 (1.19) 中二式可求得:

$$\left\{ \begin{aligned} A_m &= -\frac{2 p_0 a^4}{(m\pi)^5 D_p} (1 - \cos(m\pi)) \\ B_m &= -\frac{A_m}{2} \\ C_m &= A_m \left[\frac{\alpha_m}{2} + \operatorname{csch} \alpha_m + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_m}{2} \operatorname{cth} \alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{2} (\operatorname{cth} \alpha_m)^2 \right] \\ D_m &= \frac{A_m (ch \alpha_m - 1)}{2 sh \alpha_m} \end{aligned} \right. \quad (1.34)$$

其中, $\alpha_m = \frac{m\pi b}{a}$ 。将 (1.33)、(1.34) 代入 (1.32)

关于 x, y 求二阶偏微分可得:

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[A_m ch \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} sh \frac{m\pi y}{a} + C_m sh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} ch \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1.35)$$

$$\frac{2 p_0 a^4}{(m\pi)^5 D_p} (1 - \cos(m\pi)) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$w_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[(A_m + B_m + D_m \frac{m\pi y}{a}) sh \frac{m\pi y}{a} + (B_m \frac{m\pi y}{a} + C_m + D_m) ch \frac{m\pi y}{a} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (1.36)$$

$$\nabla^2 w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(A_m + 2 B_m ch \frac{m\pi y}{a} + 2 D_m sh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1.37)$$

将式 (1.35) ~ (1.37) 代入 (1.11) 和 (1.22) 即得压电薄板弯曲应力和电势的 Levy 解表达式。

4 数值算例

以边长 $a=500\text{mm}$, 宽度 $b=1000\text{mm}$, 表面在 1N 均匀分布荷载作用下的四边简支 PZT-5H 矩形压电薄板弯曲为数值算例, PZT-5H 材料特性如表 1, $h/a=20$ 时 PZT-5H 矩形压电薄板横向挠度的 Navier 和 Levy 解分别如图 1 中 (a)、(b) 所示, 计算时取 $m=n=10$, 为便于对比给出了板中具体位置的横向位移如表 2, 显然, 本文推导所得矩形压电薄板弯曲的 Navier 解和 Levy 解一致。

为研究不同厚度矩形压电薄板弯曲特性的 Navier 和 Levy 解, 分别考虑 $h/a=10、15、20$ 三种情况, 图 2 为

$y=b/2$ 时, 两种不同解析方法所得矩形压电薄板横向位移沿 x 轴分布, 图 3 为 $x=a/2$ 时, 两种不同解析方法所得矩形压电薄板横向位移沿 y 轴分布, 图 4 为两种不同解析方法薄板中心 ($x=a/2, y=b/2$) 处电势沿厚度分布; 图 2-4 中数值结果表明随着矩形薄板厚度减小, 相同荷载作用下薄板横向位移和中心点处的电势均逐渐增大, Navier 解和 Levy 解所得薄板中电势相同。

图 5-7 中三种不同厚度矩形压电板在 $x=a/4, y=b/4$ 时应力沿厚度分布表明, 在中性面 $z=0$ 处板的应力为零, 板上下表面应力最大。矩形压电薄板短边方向 (x 向) 上下表面应力比长边方向 (y 向) 大, 随着压电板厚度的减小薄板的应力逐渐增大。为分析不同压电材料矩形压电板的弯曲特性, 本文分别研究了 PZT-5A、PZT-5A、PZT-6B、PZT-7A 四种不同压电材料特性下, $h/a=20$ 时压电薄板弯曲问题的 Navier 和 Levy 解, 四种压电材料的材料常数如表-1。Navier 和 Levy 解所得 $y=b/2$ 时四种矩形压电薄板横向位移沿 x 轴分布如图 8 所示, 图中解析结果表明四种不同压电材料矩形薄板位移关系为 $w_{5A} > w_{5H} > w_{7A} > w_{6B}$, 分析主要原因为厚度相同情况下, 压电矩形薄板的等效弯曲刚度 D_p 与其弹性常数 C_{11} 及压电常数 e_{31} 和介电常数 ϵ_{33} 有关, 而与压电常数和介电常数相比压电材料的弹性常数对薄板弯曲刚度的贡献较大, 本文中 $(c_{11})_{5A} < (c_{11})_{5H} < (c_{11})_{7A} < (c_{11})_{6B}$ 。

四种压电材料矩形薄板中心 ($x=a/2, y=b/2$) 处电势沿厚度分布如图 9, 图中解析结果表明四种不同压电材料矩形薄板电势关系为 $\phi_{7A} > \phi_{5A} > \phi_{5H} > \phi_{6B}$, 分析主要原因为厚度相同情况下, 压电矩形薄板的电势 ϕ 与 $-\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}}$ 有关, 本文中: $\left(-\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}}\right)_{7A} > \left(-\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}}\right)_{5A} > \left(-\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}}\right)_{5H} > \left(-\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}}\right)_{6B}$

表 1 压电材料特性

压电材料	弹性常数 GPa					压电常数 C/m ²			介电常数 nC/Vm			密度 kg/m ³
	C ₁₁	C ₃₃	C ₅₅	C ₁₂	C ₁₃	e ₃₃	e ₃₁	e ₁₅	Ξ_{11}	Ξ_{22}	Ξ_{33}	
PZT-5A	121	111	21.1	75.9	75.4	15.8	-5.4	12.3	8.11	8.11	7.35	7750
PZT-5H	126	117	23.0	79.1	83.9	23.3	-6.5	17.0	15.1	15.1	13.0	7500
PZT-6B	168	163	35.5	84.7	84.2	7.10	-0.94	4.60	3.60	3.60	3.42	7550
PZT-7A	148	131	25.3	76.1	81.3	9.50	-2.1	9.20	4.07	4.07	2.08	7600

表 2 板的挠度值 ($\times 10^{-9}$ m)

y (m)		x (m)				
		0.250	0.300	0.350	0.400	0.450
0.250	Navier 解	2.898	2.762	2.364	1.732	0.918
	Levy 解	2.898	2.762	2.364	1.732	0.918
0.500	Navier 解	3.762	3.584	3.063	2.241	1.186
	Levy 解	3.762	3.584	3.063	2.241	1.186

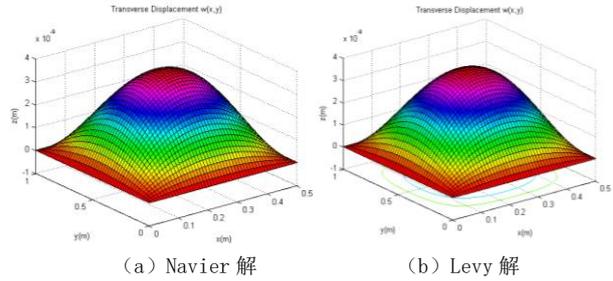


图 1 矩形压电薄板横向位移

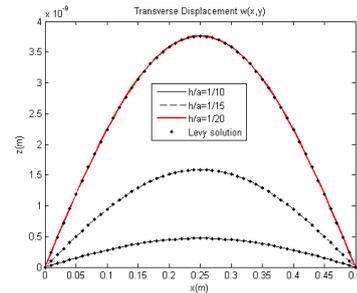


图 2 横向位移沿 x 轴向分布

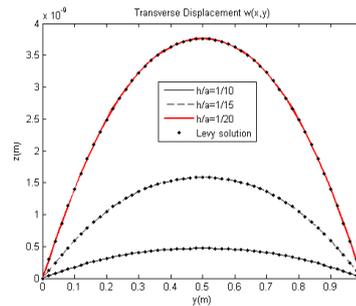


图 3 横向位移沿 y 轴向分布

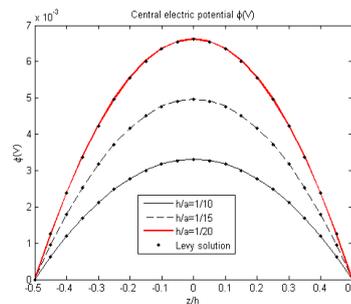


图 4 矩形压电薄板中心点电势沿厚度分布

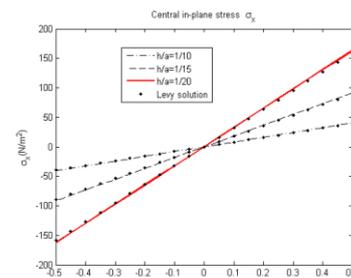


图 5 σ_x 随板厚度分布

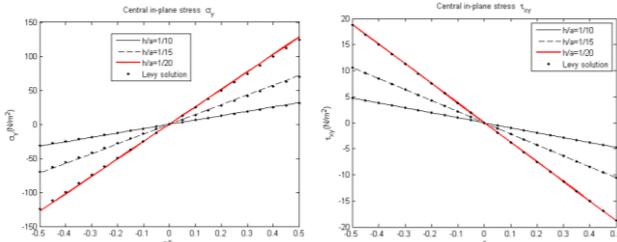


图6 σ_y 随板厚度分布

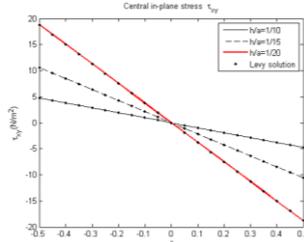


图7 τ_{xy} 随板厚度分布

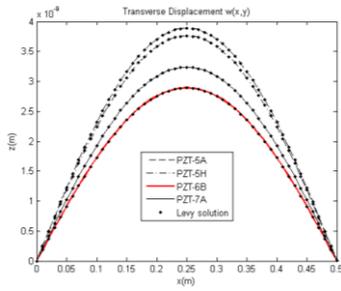


图8 四种压电材料矩形薄板横向位移

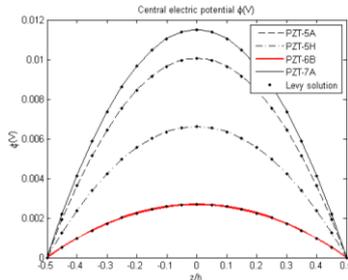


图9 四种压电材料矩形薄板电势沿厚度分布

5 结论

本文基于小挠度薄板弯曲假定,推导了横贯各项同性压电薄板弯曲平衡方程,并分别采用 Navier 和 Levy 方法获得了四边简支矩形压电薄板横向位移、应力和电势的解析表达式。以表面均匀单位荷载作用下的四边简支矩形压电薄板为数值算例,验证了两种解析方法所得位移场、应力场和电势结果一致,研究了不同厚度和不同压电材料压电板的弯曲特性,得出如下结论:相同荷载作用下,矩形压电板厚度越小,横向挠度、产生的电势及平面内应力越大。

压电材料的弹性常数 C_{11} 对薄板弯曲等效刚度 D_p 的贡献较大,相同条件下,弹性常数 C_{11} 越小的压电板横向挠度越大;厚度相同情况下,压电矩形薄板的电势 ϕ 与 $-\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}}$ 有关, $-\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}}$ 越大的压电板,其产生的电势越高。

【参考文献】

[1]Zhang S.,R. Xia,L. Lebrun,D. AndersonT. ShROUT Piezoelectric materials for high power,high

temperature applications[J].Materials Letters,2005,59(27):3471-3475.

[2]Ray M.,K. Rao,B. Samanta Exact analysis of coupled electroelastic behaviour of a piezoelectric plate under cylindrical bending[J].Computers & Structures,1992,45(4):667-677.

[3]Chen C.,Y. Shen,X. Wang.Exact solution of orthotropic cylindrical shell with piezoelectric layers under cylindrical bending[J].International Journal of Solids and Structures,1996,33(30):4481-4494.

[4]Jianguo W. The state space solution of layered space axisymmetric piezoelectric media[J].Acta Mechanica Sinica,2001(1):6.

[5]Wang J., S. Fang,L.Chen.The state vector methods for space axisymmetric problems in multilayered piezoelectric media[J].International Journal of Solids and Structures,2002,39(15):3959-3970.

[6]Wang J., L. Chen,S.Fang.State vector approach to analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates[J].International Journal of Solids and Structures,2003,40(7):1669-1680.

[7]Wang J.,L. Qu,F. Qian.State vector approach of free-vibration analysis of magneto-electro-elastic hybrid laminated plates[J].Composite Structures,2009(1):85.

[8]刘正兴,李山青.轴向载荷作用下压电—弹性层合梁段的二维解析解[J].上海力学,1999,20(4):348-356.

[9]林启荣,金占礼.压电弹性层合梁的电场作用下的二维解析解[J].上海交通大学学报,2001,35(4):518-521.

[10]丁皓江,江爱民.压电梁的多项式解(I)——若干精确解[J].应用数学和力学,2005,26(9):1009-1015.

[11]丁皓江,江爱民.压电梁的多项式解(II)——典型问题解析解[J].应用数学和力学,2005,26(9):1016-1021.

[12]黄德进,丁皓江,王惠明.均布荷载作用下正交各向异性固支梁的解析解[J].浙江大学学报工学报,2006,40(3):511-514.

[13]Leung A.,J. Zheng,C. Lim,X. Zhang,X. S. XuQ. Gu A new symplectic approach for piezoelectric cantilever composite plates[J].Computers & Structures,2008,86(19):1865-1874.

[14]徐芝纶.弹性力学(下册)[M].北京:高等教育出版社,1990.

作者简介:胡敬伟(1973.9—),男,籍贯:河北保定,研究方向:土建施工,职称:高级工程师,学历:本科。