立方倍积问题有解及立方倍积问题扩展

崔贵杰
青海火电工程公司，青海 西宁 810003

[摘要]文章通过作图、证明、论述了立方倍积问题是有解的。通过探索，总结出一种“相似三角形两边对应成比例且夹角相等性质及任意角三等分原理”制图(详见<<科研>>杂志 2018.11 任意角三等分问题有解已发表)，采用最古老的画图方法，即：用直尺（规）和圆规绘制平面几何图形，成功地将立方倍积问题解决。

[关键词]任意立方体；倍数；三等分；对应边；成比例；向心角；开角；螺旋曲线；n 次方
DOI：10.33142/fme.v1i1.1402　　中图分类号：G633.6　　文献标识码：A

Solution and Extension of Duplication of Cube Problem

CUI Guijie
Qinghai Thermal Power Engineering Company, Xining, Qinghai, 810003, China

Abstract: This paper shows that cubic multiple product problem is solvable by drawing, proving and discussing. Through exploration, this paper sums up a kind of drawing method of "proportional and equal angle between two sides of similar triangles and principle of arbitrary angle trisection" (for details, see *Scientific Research* Journal 2018.11, the solution to problem of arbitrary angle trisection has been published). The oldest drawing method, namely, drawing plane geometry with ruler (gauge) and circle gauge, successfully solves the problem of cubic product.

Keywords: arbitrary cube; multiple; trisection; corresponding edge; proportion; centripetal angle; opening angle; spiral curve; nth power

引言

公元前五世纪，古希腊数学家就对几何学进行了深入的研究，对人类的文明做出了重大贡献，但是也给后人留下了不解之迷,任意角三等分问题；立方倍积问题；(作一立方体,使其体积等于已知立方体体积的二倍)；圆积问题；(作一正方形,使其面积与已知圆的面积相等)；成为世界几何学作图的三大问题。几何作图,就是指只允许有限次使用某种特定工具,画出适合所给条件的平面几何图形。最古老、最熟悉的方法就是用直尺（规）和圆规绘制平面几何图形。几何作图的三大问题,均在十九世纪被否定地解决了,也可以说无解；或者说至今尚未被解决。在这里我通过作图、证明、论述一下立方倍积问题是有解的。通过探索，总结出一种“相似三角形两边对应边成比例且夹角相等性质及任意角三等分原理”的绘图方法，采直尺（规）和圆规绘制平面几何图形,成功地解决了立方倍积问题。

该作图使用于所有倍数立方倍积问题。

1 立方倍积问题的分析、作图、证明

如果有三个任意角相似三角形，其中、第一个三角形斜边(大边)是第二个三角形邻边相等，第二个三角形斜边(大边)是第三个相似三角形邻边，且对应角相等，如（图1）所示；

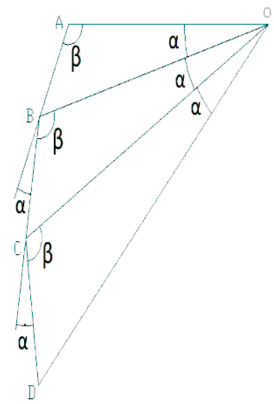

图 1

为了作图及便于解释、说明，我们把 α 角定义为向心角，β 角定义为开角；(因为 α 角不是圆心角，β 角可渐渐变化展开，后面将经常用到。)

1.1 分析

∵△OAB∽△OBC∽△OCD

∴OB/OA=OC/OB=OD/OC(两个三角形相似，两边对应成比例且夹角相等).

又∵OB/OA=OC/OB→∴$OC=OB^2/OA$

又∵OC/OB=OD/OC→$(OB^2/OA)^2/OB=OD$→$OB^3/OA^2=OD$

∴$OB^4/OB/OA^2=OD$→$OB^3/OA^2=OD$

假设当 $OA=1$、$OD=2$ 时:→$OB^3=2$→$OB=\sqrt[3]{2}$

我们首先分析一下平方根图形，如（图 2）所示；为了图形与（图 1）标注的连续性，字母有跳标现象。为了分析清晰、直观，（图 2）在$\angle OAC_2=90^0$、$\angle OC_2D=90^0$范围研究、解析。即：开角增大 α，即全角的 1/4。

注：∵$\angle AOD=4\alpha$，即$\angle AOC_2=2\alpha$　$\angle C_2OD=2\alpha$

∴$\angle OC_4D=\angle OAC_4+2\alpha$

∴$\angle OAC_2=\angle OAC_4+\alpha=\angle OC_2D=\angle OC_4D-\alpha$

即：开角增大 α，即总向心角的 1/4

∵$\triangle OAC_2\backsim\triangle OC_2D$

∴$OC_2/OA=OD/OC_2$(两个三角形相似，两边对应成比例且夹角相等)

因 OA 与 AC_2 为 90^0,（为了分析简单及直观，部分分析在 90^0 范围分析）所以根据勾股定理 $C^2=A^2+B^2$ 即：$OC^2=OA^2+AB^2=1^2+1^2=2$

又因 OC_2 与 C_2D 为 90^0，所以根据勾股定理 $OD^2=OC^2+C_2D^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2=4$　　$OD=2$

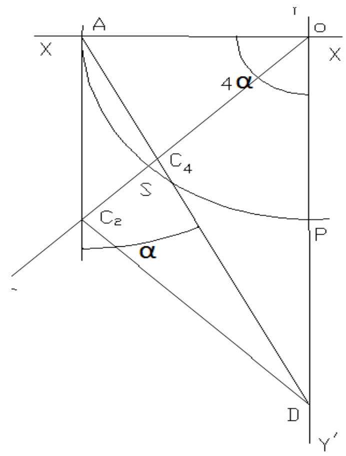

图 2

那么 $\sqrt[3]{2}$ 如何作图呢?

我们作$\angle AOC_2$、$\angle C_2OD$ 的角平分线，根据（图 1）所示，直线 AB 与直线 BC 的夹角与向心角相等为 α，因此可简单作出；我们在（图 2）基础上将开角展开、增大 α/2，即全角的 1/8，如（图 3）所示；我们发现有四个相似三角形，而（图 1）所示为三个相似三角形，且第三个三角形的斜边(大边）并不是 2，而第四个三角形的斜边(大边）才为 2；如果我们将第四个三角形三等分且平分给另外三个相似三角形问题不就解决了吗!

因此，只要作图满足一立方体变为二立方体问题就解决了。

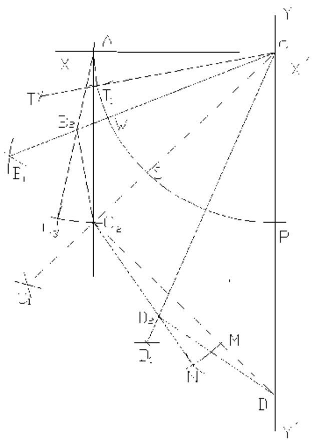

图 3

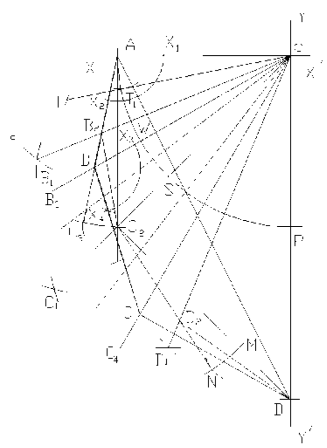

图 4

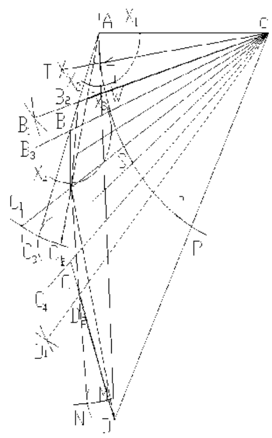

图 5

1.2 作图

1.2.1 作图

第一步：用直尺作 $X-X_1$ 直线;

第二步：用圆规分别在 $X-X_1$ 直线端点为圆心，以大于 $X-X_1$ 长度的一半为半径在 $X-X_1$ 直线两侧画圆弧，分别交于 y、y_1 点，作垂直于 $X-X_1$ 直线的垂线 $Y-Y_1$. 相交于 O 点;（为节省图纸空间，y、y_1 点及部分不用空间不再显现）

第三步：用圆规以 O 点为圆心,以 r 为半径画圆弧，分别与 $X-X_1$、$Y-Y_1$ 直线相交于 A、P 点，再用圆规以 P 点为圆心以 r 为半径画圆弧，与 $Y-Y_1$ 直线相交于 D 点，用直尺作 A 点、D 点直线;（构成 $2OA=OD$）

第四步：作 $X-X_1$、$Y-Y_1$ 直线平分线，分别以 A、P 点为圆心，以 r 为半径画圆弧，相交于 C_1 点，用直尺作 O、C_1 点直线;（构成$\angle AOD$ 的 1/2 等分）

第五步：以 A 点为圆心，以 r 为半径画圆弧，相交于 C_2 点，用直尺作 AC_2 直线;（因$\angle AOC_2=\angle AOD/2=45^0$ $OA=AC_2=r$ 所以$\angle OAC_2=90^0$）

第六步：以 C_2 为圆心，以 OC_2 为半径画圆弧，相交于 Y-Y_1 直线于 D 点，用直尺作 C_2D 直线；（因∠DOC_2=∠AOD/2=45^0 $C_2D=OC_2=\sqrt{2}$，所以∠$OC_2D=90^0$ OD=2）

第七步：以 O 点为圆心，以 r 为半径划圆弧相交 OC_1 边于 S 点，分别以 A、S 点为圆心，以 AS 距离长度为半径画圆弧，相交于 B_1 点，用直尺作 O 点、B_1 点直线；（构成∠AOD 的 1/4 等分）

第八步：分别以 P、S 点为圆心，以 r 长度为半径画圆弧，相交于 D_1 点，用直尺作 O 点、D_1 点直线；（构成∠AOD 的 1/4 等分）

第九步：以 O 点为圆心，以 r 为半径划圆弧相交 OB_1 边于 W 点，分别以 A、W 点为圆心，以 AW 长度为半径画圆弧，相交于 T 点，用直尺作 O 点、T 点直线；（构成∠AOD 的 1/8 等分）

第十步:以 O 点为圆心，以 r 为半径划圆弧，与 OT 边相交于 T_1 点，再以 A 点为圆心，以 r 为半径划圆弧（与 C_2 点重合），，用圆规截取 AT_1 长度，再以 C_2 点为圆心画弧，相交于 C_3 点，用直尺作 A 点、C_3 点直线，与 OB_1 边相交于 B_2 点，构成△OAB_2（开角增大 α/2，即总向心角角的 1/8）；

第十一步:用直尺作 B_2 点、C_2 点直线；（构成△OC_2B_2；∠$C_3B_2C_2$=α）

第十二步：以 C_2 点为圆心，以 r 为半径划圆弧，与 C_2D 边相交于 M 点，用圆规截取 AT_1 长度，，以 M 点为圆心，以 AT_1 长度为半径划圆弧，相交于 N 点，用直尺作 C_2 点、N 点直线，与 OD_1 边相交于 D_2 点；（构成 △OC_2D_2 ∠D_2C_2M=α）

第十三步：用直尺作 D_2 点、D 点直线；（构成△OD_2D ∠ND_2M=α）

第十四步：分别将∠B_2OC_2、∠C_2OD_2 三等分；构成 OB_3 直线、OC_4 直线；（实为将∠DOD_2 三等分均分给其它三个三角形）(详见<<科研>>杂志 2018.11 任意角三等分问题有解已发表)在此不再论述。见（图 4）

第十五步：延长 AB_2 直线于 OB_3 线相交于 B；构成△OAB；

第十六步：以 A 点为圆心，以 r_0 为半径划圆弧，与 OA 边相交于 X_1 点，与 AB 边相交于 X_2 点；再以 B 点为圆心，以 r_0 为半径划圆弧，与 OB 边相交于 X_3 点，用圆规截取 X_1 、X_2 点长度，再以 X_3 点为圆心，以 X_1 、X_2 点长度为半径划圆弧，相交于 X_4 点，用直尺作 B 点、X_4 点直线，且与 OC_4 边相交于 C 点；构成 △OBC；

第十七步：用直尺作 C 点、D 点直线；（或开角增大 α/2，即总向心角的 1/8）；构成 △OCD；

这时构成了△OAB、△OBC、△OCD

注：第一次开角增大了总向心角的四分之一，第二次开角增大了总向心角的八分之一，开角总的增大了八分之三，然后将第四个三角形三等分平分给另外三个相似三角形，构成了△OAB、△OBC、△OCD，如（图 4）所示。（图 5）是任意角的立方倍积作图。由于 3α/8 可作图得到，因此，我们可以将作图步骤简化。

1.2.2 简化作图

（图 6）

第一步：作一任意角并再复制两个角，同向、并列成扇形；

第二步：用圆规以 O 点为圆心以 r 为半径画圆弧，与三个角的外侧边分别交于 A 点、P 点，再以 P 点为圆心，以 r 长度为半径划圆弧，相交于 D 点，(2 倍长度)用直尺作 A 点、D 点直线；构成了△OAD；

第三步：分别以 A、P 点为为圆心，以 AP 为半径画圆弧，相交于 Y_1 点，用直尺作 O、Y_1 点直线，于 A、P 圆弧，相交于 S 点；（将∠AOD 二分之一等分）

第四步：分别以 A、S 点为为圆心，以 AS 为半径画圆弧，相交于 Y_2 点，用直尺作 O、Y_2 点直线，于 A、P 圆弧相交于 W 点；（将∠AOD 四分之一等分、或者说将∠AOY_1 二分之一等分）

第五步：分别以 W、S 点为为圆心，以 AS 为半径画圆弧，相交于 Y_3 点，用直尺作 O、Y_3 点直线，于 A、P 圆弧相交于 T 点；（将∠AOY_1 四分之一等分，∠Y_3OY_1 四分之一等分，这时∠AOY_3 是∠AOD 八分之三等分）

第六步：以 A 点为为圆心，以 r 为半径画圆弧，在 AD 边相交于 M 点，用圆规截取 A、T 点长度，以 M 点为圆心，以 AT 点长度为半径划圆弧，相交于 N 点，用直尺作 A、N 点直线；（开角增大总向心角的 3α/8，）

第七步：以 A 点为为圆心，以 AT 长度为半径画圆弧，与 OA 边相交于 X_1 点与 AN 边相交于 X_2 点，再以 B 点为为圆心，以 AT 长度为半径画圆弧，与 OB 边相交于 X_3 点，再以 X_3 点为为圆心，以 X_1 点、X_2 点长度为半径画圆弧，相交于 X_4 点，用直尺作 B、X_4 点直线，且过 X_4 点相交于 C 点；

第八步：用直尺作 C、D 点直线。（构成了△OAB、△OBC、△OCD）如（图 6）所示(或开角增大总向心角的 3α/8 方法，用直尺作 C、D 点直线，）

注：由（图 1）可知，向心角对应边夹角等于向心角，且开角增大 α/2，由（图 3）可知，如果按总角度计算，每"切割"一次，开角增大 α/4，这样才能满足第一个三角形斜边(大边)是第二个三角形邻边，第二个三角形斜边(大边)是第三个相似三角形邻边，且对应角相等，由于进行了两次"切割"，开角共增大的 3α/8，也由此决定了△AOD 的图形，即：△AOB、△BOC、C 点确定后，D 点已知，因此 CD 直线可直接画出。如（图 6）所示。

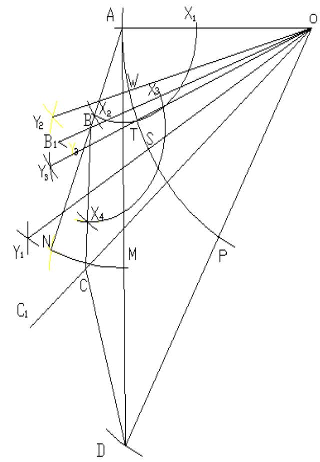

图 6

1.3 证明

∵△OAB∽△OBC∽△OCD

∴OB/OA=OC/OB=OD/OC(两个三角形相似，两边对应成比例且夹角相等).

由（图 4）可知:当 OA=1、OD=2 时

又∵OB/OA=OC/OB→∴$OC=OB^2$

∵OC/OB=OD/OC→OC/OB=OD/OC→$OC^2/OB=OD$

又∵$OC=OB^2$

∴$OB^4/OB=OD$→$OB^3=OD$

$OB=\sqrt[3]{2}$

定理 1：当两个三角形相似并例同向，成扇形且第一个三角形斜边(大边)是第二个三角形邻边(相等)，那么，这两三角形对应边的夹角等于这个对应边所对应角的夹角。

定理 2：当有一个三角形，将其中一角平分后，如果从新构成两相似三角形，那么三角形向心角的对应边开角增大总向心角的四分之一角，第二个三角形对应边开角减小总向心角的四分之一角。

定理 3：当有三个三角形，成扇形，其中三角形外边为 1 单位，而另一外边为 2 单位，(可做一个角后再复制另两角)，连接 1 单位与 2 单位处，构成一个三角形，这时开角增大总向心角的 3α/8，与三等分第一根内边相连，再按此开角与三等分第二根内边相连，再与另一边为 2 单位相连(或开角增大总向心角的 3α/8)，构成三个相似三角形，且第一个三角形斜边(大边)是第二个三角形邻边，第二个三角形斜边(大边)是第三个相似三角形邻边，且三个相似三角形对应角相等，如（图 1）所示；那么，第一个三角形斜边(大边)等于即第三个三角形斜边的 $\sqrt[3]{2}$。如果将此边作一立方体，即：一立方体的二倍。

2 立方倍积问题扩展

2.1 立方倍积问题多倍数问题

立方倍积问题解决了有解！那么 3 倍、4 倍、5 倍、6 倍...立方倍积问题呢？或者说 2.1 倍、2.2 倍 2.3 倍...有解吗？实际上此定理解决了所有立方倍积问题，按此方法作图全部通用，无非将一边延长为所需要的倍数值即可，在此就不再分析、作图、证明了。

2.2 n 次方螺旋曲线

大家知道我们曾学过抛物线、双曲线、阿基米德螺旋曲线等，那么、n 次方螺旋曲线呢？如果我们将（图 1）延伸就构成（图 7）所示的螺旋曲线，从（图 7）可以看出，向内作图最小为零,向外作图最大为无穷大，如果向心角较小(或充分小)时，那么就构成了螺旋曲线，如（图 8）所示；

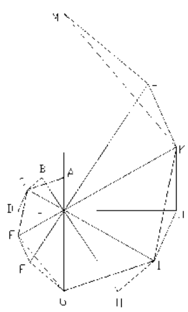

图 7

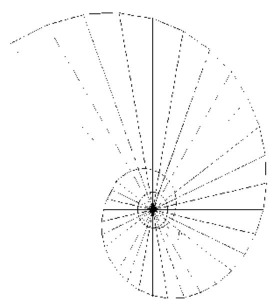

图 8

图 9

2.3 证明

∵△OAB∽△OBC∽△OCD∽△ODE∽△OEF∽△OFG∽...

∴OB/OA=OC/OB=OD/OC=OE/OD=OF/OE=OG/OF...

(两个三角形相似，两边对应成比例且夹角相等).

又∵OB/OA=OC/OB→∴$OC=OB^2/OA$

∵OC/OB=OD/OC→OC/OB=OD/OC→$OC^2/OB=OD$

∵$OC=OB^{2/}OA$→$(OB^{2/}OA)^2/OB=OD$→$OB^3/OA^2=OD$

∵OD/OC=OE/OD→$(OB^3/OA^2)^2/OB^2/OA=OE$→$OB^4/OA^3=OE$

∴OE/OD=OF/OE→$(OB^4/OA^3)^2/OB^3/OA^2=OE$→$OB^5/OA^4=OF$

OF/OE=OG/OF→$(OB^5/OA^4)^2/OB^4/OA^3=OG$→$OB^6/OA^5=OB^n/OA^{(n-1)}$

注：n 为相似三角形数量

定理 4：如果有 n 个相似三角形，当向心角充分小，同向，成扇形且第一个三角形斜边(大边)是第二个三角形邻边，第二个三角形斜边(大边)是第三个相似三角形邻边...，第 n-1 个三角形斜边(大边)是第 n 个相似三角形邻边，且对应角相等，那么，最终边等于第一个三角形斜边(大边)长度的 n 次方与第一个三角形邻边的 n-1 次方的倒数。

定理 5：如果有 n 个相似三角形，当向心角较小(充分小)同向，成扇形且第一个三角形斜边(大边)是第二个三角形邻边，第二个三角形斜边(大边)是第三个相似三角形邻边，且对应角相等...，第 n 个三角形斜边(大边)是第 n-1 个相似三角形邻边，且对应角相等，那么，相似三角形向心角所对边构成一条连续曲线，我们把它称为 n 次方螺旋曲线；该螺旋曲线的开角与海螺曲线"型似"时，我们把它命名为海螺螺旋曲线。

[参考文献]

[1]林崇德,姜璐,王德胜.成人百科全书(数学电脑)[M].广东:南海出版,2001.
[2]曲钦岳.当代百科知识大词典[M].江苏:南京大学出版社,2010.
[3]王家传.尺规作图无法逾越的鸿沟——三大几何难题的由来[J].语数外学习初中版八年级,2008(6):32-32.
[4]佚名.古希腊的三大世界数学难题[J].小学教学数学版,2007(6):16-16.
[5]三等分角.古希腊三大几何问题[J].初中生学习,2004(7):85-85.
[6]陈督武.三大几何作图问题的产生研究与解决[J].数学教学通讯,2011(6):18-19.

作者简介：崔贵杰（1962.5-），男，目前是高级工程师。