

基于教学思维的滑动摆系统及其特性可视化探析

白万盛 李金岩 李杰 郑怡 郑兴荣*

陇东学院 新能源学院物理系, 甘肃 庆阳 745000

[摘要] 本论文旨在从教学思维的角度深入探讨滑动摆系统及其特性, 并以可视化方式呈现。首先基于多体力学理论和理论力学知识介绍了滑动摆系统的基本构成与工作原理, 随后分析了滑动摆的各项重要特性。着重阐述了如何运用 MATLAB 软件的可视化手段将这些特性以直观易懂的方式展现给学习者, 以提升教学效果, 促进对滑动摆系统及其相关知识的理解与掌握。这种将科学研究思路融入课程教学的方法, 有助于学生更加容易理解抽象的物理现象。

[关键词] 教学思维; 滑动摆系统; 可视化; 探析

DOI: 10.33142/fme.v6i1.14966

中图分类号: G6

文献标识码: A

Exploration on Sliding Pendulum System and Its Characteristics Visualization Based on Teaching Thinking

BAI Wansheng, LI Jinyan, LI Jie, ZHENG Yi, ZHENG Xingrong*

Department of Physics, School of New Energy, Longdong University, Qingyang, Gansu, 745000, China

Abstract: This paper aims to explore the sliding pendulum system and its characteristics from the perspective of teaching thinking, and present them in a visual way. Firstly, based on the theory of multibody mechanics and theoretical mechanics knowledge, the basic composition and working principle of the sliding pendulum system were introduced. Then, the important characteristics of the sliding pendulum were analyzed. Emphasis was placed on how to use the visualization techniques of MATLAB software to present these features to learners in an intuitive and understandable manner, in order to enhance teaching effectiveness and promote understanding and mastery of sliding pendulum systems and related knowledge. This method of integrating scientific research ideas into curriculum teaching helps students better understand abstract physical phenomena.

Keywords: teaching thinking; sliding pendulum system; visualization; exploration and analysis

引言

不管是教学还是科学研究方面, 滑动摆系统作为一个很有代表性的力学模型, 它融合了多种物理概念和规律。滑动摆系统是一种具有双自由度的力学系统^[1], 其受力过程包括摩擦力、重力以及阻尼等因素。其在机械设计领域和实际应用中有着重要地位, 并对于机械控制领域起到了举足轻重的作用。在实际应用中, 滑动摆系统的稳定性分析还需要考虑各种因素的影响, 如外部扰动、参数变化等, 所以对滑动摆系统及其相关特性的研究是必不可少的, 尤其是其稳定性、周期性等一些相关特性的研究。近几年对于摆动系统及其相关特性的研究主要针对的是工程实际应用^[2-7], 或者是运用 PID、LQR、模糊控制、神经网络等一些算法对其相关性质的研究, 而对于滑动系统及其相关特性的理论分析和数值仿真却少有研究。另外, 受限于滑动摆系统复杂的原理, 在教学研究这一方面也有许多困难。

随着科学技术的发展和计算机性能的提高, 数值仿真和数值计算已经成为越来越重要的研究手段之一^[8-11]。因此, 在许多学科领域中运用 MATLAB 软件进行数值仿真有着非常重要的作用, 如: 机械控制、工程力学、理论力学、热力学和物理学等。通过 MATLAB 对滑动摆系统及其相关特性的数值仿真深入探究很有必要, 可以为摆控制、摆的机械设计和

摆共振等领域提供一种新的研究思路, 也能借助可视化结果的呈现, 极大地帮助学生更好地理解相关知识, 提升教学效果。

因此, 基于教学思维, 采用有效的可视化方法来呈现滑动摆系统及其特性就显得尤为重要。本文从理论上分析滑动摆系统的动力学特性并通过 MATLAB 软件进行数值仿真。这种将可视化的科学研究方法融入到教学中, 对教育教学的辅助作用非常明显。这不仅能够帮助学生更清晰地认识该系统, 还能激发他们对物理学科的学习兴趣。

1 滑动摆的构成与工作原理

以滑动摆系统为研究对象, 对其及其相关特性进行研究。该系统为双自由度系统, 受理想约束, 且为保守系统。根据滑动摆系统的结构, 得到其三维模型图及其受力分析图, 如图 1 所示。

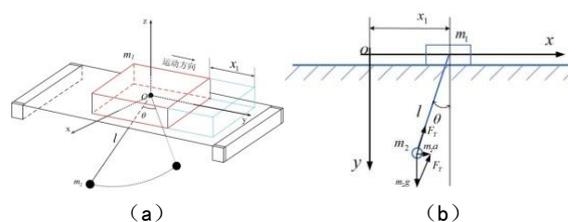


图 1 滑动摆系统的三维模型图和受力分析图。(a) 三维模型图, (b) 受力分析图

设滑动摆系统中，滑块质量为 m_1 、摆锤质量为 m_2 、摆杆长度为 l ，取位移 x 和摆角 θ 为广义坐标，建立拉格朗日方程组，如下所示：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

根据动力学模型和能量守恒定律，建立系统的拉格朗日函数^[4]：

$$L = T - V \quad (2)$$

式中 T 为系统总动能， V 为系统总势能，其表达式为：

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m_2 l \frac{dx}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \quad (3)$$

$$V = -m_2 g l \cos \theta \quad (4)$$

将 (3) (4) 式带入拉格朗日函数，得：

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m_2 l \frac{dx}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos \theta + m_2 g l \cos \theta \quad (5)$$

将 (5) 式带入拉格朗日方程 (1) 式，且令 $M = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ ，

求得系统运动微分方程为：

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{-M \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{g}{l} \sin \theta}{1 - M \cos^2 \theta} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{Mg \cos \theta \sin \theta + Ml \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{1 - M \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (6)$$

令 $y_1 = \theta$ 、 $y_3 = x$ 、 $y_2 = \frac{d\theta}{dt}$ 、 $y_4 = \frac{dx}{dt}$ ，通过龙格-库塔法

将 (6) 式化简为一阶微分方程组，以便后文借助 MATLAB 软件求得数值解。如下：

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{-My_2^2 \cos y_1 - \frac{g}{l} \sin y_1}{1 - M \cos^2 y_1} \\ \frac{dy_3}{dt} = y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} = \frac{Mg \cos y_1 \sin y_1 + My_2^2 \sin y_1}{1 - M \cos^2 y_1} \end{cases} \quad (7)$$

2 滑动摆系统及其特性的可视化

结合理论推导得到的动力学微分方程组，运用 MATLAB 软件进行数值仿真，计算了滑动摆系统在理想情况下，不同初始摆角和摆杆长度下的位移和摆角的关系，同时利用快速傅里叶变换 (FFT) 分析了非线性函数周期

和频率与初始条件之间的关系。

2.1 不同初始角度系统特性的可视化研究

确定滑块质量 $m_1=8\text{kg}$ 摆锤质量 $m_2=2\text{kg}$ 和摆杆长度 $l=1\text{m}$ ，结合公式 (7) 利用龙格-库塔法，计算了不同初始角度 $\theta=5^\circ、30^\circ、90^\circ$ 滑动摆系统的最大摆角和最大位移，如图 2 所示。

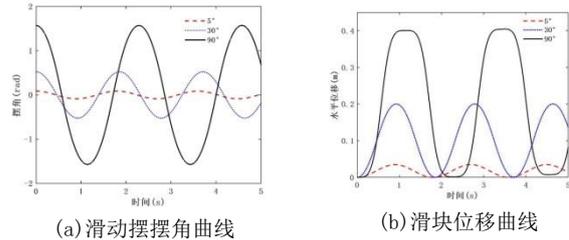


图 2 不同初始角度系统摆角位移变化规律

由图 2 可以看到，系统初始角越小，周期越短，稳定性较强。摆角和滑块水平位移呈现等幅振动。摆锤从初始摆角处开始向正方向摆动，速度先增大，后减小，并运动到距平衡位置正向最远处，水平位移和摆角达到正向最大值，即为初始角。在相同周期内，初始摆角小的摆锤运动相位滞后于初始摆角大的摆锤，最后恢复到平衡位置。通过计算得到 $\theta=5^\circ、30^\circ、90^\circ$ 时的最大位移大约为 0.0349m、0.2004m、0.4044m。由此可以看出，随着初始摆角增大，滑块偏离平衡位置位移也随之增大。所以，初始摆角在决定系统稳定性。这种计算仿真结果与实际应用结果完全吻合。

2.2 不同摆杆长度系统特性的可视化研究

确定滑块质量 $m_1=8\text{kg}$ 、摆锤质量 $m_2=2\text{kg}$ 和初始角度 $\theta=5^\circ$ ，结合公式 (7)，利用龙格-库塔法，计算了不同摆杆长度 ($l=0.3\text{m}、1.0\text{m}、1.7\text{m}$) 的最大摆角和最大位移。如图 3 所示。

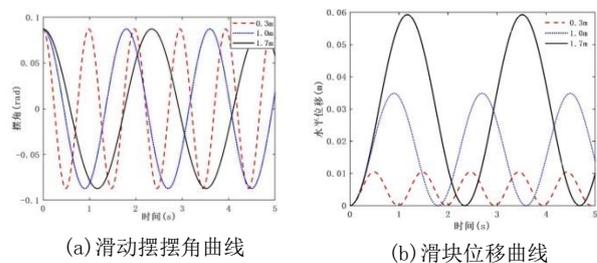


图 3 不同摆杆长度系统摆角位移变化规律

由图 3 可以看出，不同杆长下的摆角和水平位移，呈现等幅振动，摆杆长度越长，周期越长，稳定性较弱。不同摆杆长度对系统最大摆角几乎无影响，而对水平位移来讲，摆杆长度越短，摆动速度越慢，水平位移越短，整个系统稳定性越好。当 $l=0.3\text{m}$ 时，系统正向最大摆角运动到负向最大摆角所用时间大约为 0.5s，滑块达到最大位移大约为 0.0105m； $l=1.0\text{m}$ 时，系统正向最大摆角运动到负向最大摆角所用时间大约为 0.91s，滑块达到最大位移大约为 0.0349m； $l=1.7\text{m}$ 时，系统正向最大摆

角运动到负向最大摆角所用时间大约为 1.20s, 滑块达到最大位移大约为 0.0593m; 由此可以看出随着摆杆长度的增加, 系统恢复时间几乎增加一倍。所以摆杆长度在决定系统稳定性。这种数值仿真结果与实际情况较为相符。

2.3 快速傅里叶变化下的滑动摆系统可视化研究

由图 2, 3 发现, 系统摆角和滑块位移都是周期函数。如图 4 所示, 周期都随摆角和摆杆长度的增加而增加。摆角的变化规律在时域内是余弦曲线, 但是否为标准的余弦周期函数, 需借助快速傅里叶变换分析, 并对其结果归一化处理。因此, 通过 MATLAB 快速傅里叶变换 (FFT) 对两种参数变化下的摆角做了分析并得到对应的幅频图, 如图 4 所示。

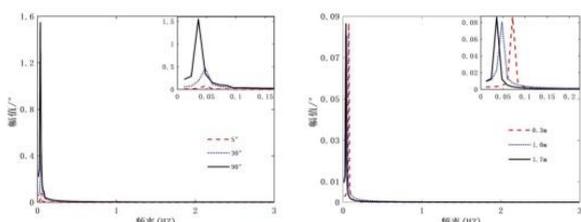


图 4 不同初始摆角和不同摆杆长度的傅里叶变换

由图 4 发现, 不同初始摆角和不同杆长的傅里叶变换都有相对明显的峰值, 故摆角变化规律在时域中为余弦周期函数。由于最大峰值对应的主频率不同, 频率随着初始角和摆杆长度增大而减小, 说明周期会随着初始角和摆杆长度增大而增大。因此验证了摆角变化规律并非标准的余弦周期函数, 同时得到滑动摆系统的拉格朗日方程是非线性函数, 并且其周期和频率会随系统初始条件改变而改变。

3 滑动摆系统可视化探究的教学应用与效果评析

本文通过构建一个实际的滑动摆系统物理模型, 运用 MATLAB 软件得到了可视化的结果。学习者可以直观地观察到摆锤的摆动、滑动情况, 以及不同参数(如摆杆长度、摆角、滑块位移等)改变时系统运动状态的变化。这种物理模型演示和可视化结果能够让学生对滑动摆系统有一个最直接的感性认识, 是教学的基础环节。通过设置不同的参数值, MATLAB 软件模拟出系统在各种情况下的运动轨迹、位移变化等特性, 并以模型、图表等形式呈现出来。能够让师生深入探究不同参数对系统特性的影响, 而且可以方便地展示一些在实际物理模型中难以实现的极端情况或复杂场景。针对滑动摆系统的各项特性, 通过动态展示这些图表, 可以让学生清晰地看到各项数据的变化趋势以及不同参数下的差异。例如, 以时间为横轴, 滑动摆的摆角和位移为纵轴制作关系图, 随着时间的推移, 学生可以直观地观察到动能在摆动和滑动过程中的周期性或非周期性变化情况。

这种可视化研究手段能够将抽象的物理概念和复杂的系统特性以直观的形象呈现给学生, 大大提高了他们对滑动摆系统相关知识的理解程度, 吸引学生的注意力, 激发他们对物理学科的学习兴趣, 使学习不再枯燥乏味。

4 结论

本文在所学理论力学课程和拉格朗日算法的基础上, 得出滑动摆系统的拉格朗日方程及其稳定性的决定因素, 通过龙格-库塔法并借助 MATLAB 仿真绘制出了系统不同初始条件下摆角和位移随时间变化曲线, 讨论了不同初始摆角和不同摆杆长度对滑动摆系统稳定性的影响。在以上工作的基础上, 本文还对滑动摆系统的摆角做了快速傅里叶变换分析, 推出了非线性函数周期和频率与初始条件的关系, 并利用 MATLAB/FFT 对其仿真绘制出了相应的幅频图。这种基于教学思维对滑动摆系统及其特性进行可视化探讨具有重要的科学研究和教学意义。它能够将抽象的物理概念和复杂的运动规律以直观、生动的形式呈现给学生, 有助于提高学生的学习兴趣和学习效果, 同时也为物理教学方法的创新提供了有益的参考和实践案例。在未来的教学中, 可以进一步拓展和完善这种可视化教学模式, 使其更好地服务于物理教学及其他相关学科的教学。本文这种数值仿真模拟的研究更容易理解, 通过数值仿真的研究, 能够更形象地理解滑动摆系统这一复杂现象, 同时也为初学者学习理论力学、多体力学和理解这些抽象、难懂的现象做了铺垫。

基金项目: 陇东学院 2023 年度教育教学改革研究项目 (JG-04), 甘肃省自然科学基金 (23JRRM0755), 国家自然科学基金 (12265018)。

[参考文献]

- [1] 彭芳麟, 管靖, 等. 理论力学计算机模拟[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [2] 高云峰. Matlab 求解理论力学问题系列(三)单摆和椭圆摆的运动及周期[J]. 力学与实践, 2021, 43(4): 593-598.
- [3] 刘小光, 吴岳明, 朱慧华, 等. 基于模型预测控制的桥式起重机防摆控制[J]. 起重运输机械, 2020, 561(13): 73-78.
- [4] 余震, 余进, 王海兰, 任豪豪. 基于拉格朗日算法的起重机摇摆模型构建及其防摇摆模糊控制系统仿真分析[J]. 武汉科技大学学报, 2022, 45(3): 197-203.
- [5] 冯岷生, 郭利进, 叶宇翔. 吊车防摆的鲁棒 PID 控制系统设计[J]. 计算机仿真, 2014, 31(5): 250-254.
- [6] Lin Bintian, Zivanovic Stana, Zhang Qingwen, et al. Implementation of damped bipedal inverted pendulum model of pedestrian into FE environment for prediction of vertical structural vibration[J].

Structures, 2023(48):11-12.

[7] Lin Xueyan, Liu Xiaohua. Modeling and Control of One-stage Inverted Pendulum Body Based on Matlab[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2022, 2224(1).

[8] 李硕, 赵彤帆, 李根全, 等. Matlab 软件在单摆自由振动中的应用[J]. 实验室研究与探索, 2013, 32(11): 65-68.

[9] 向劲松, 温掌民, 吕心浩. 基于快速傅里叶变换的高精度湍流相位屏模拟[J]. 激光杂志, 2023, 1(6): 94-103.

[10] 冯岷生, 郭利进, 叶宇翔. 吊车防摆的鲁棒 PID 控制系统设计[J]. 计算机仿真, 2014, 31(5): 250-254.

[11] 李艳杰, 佟福奇. 单级倒立摆系统的仿真分析[J]. 上海电气技术, 2021, 14(1): 44-50.

作者简介: 白万盛, 男, 甘肃张掖人, 主要从事量子理论和量子信息的仿真模拟的研究; *通信作者: 郑兴荣, 男, 甘肃天水人, 教授, 主要从事量子理论、凝聚态理论物理与新能源材料计算、仿真的研究。