浅析极坐标与参数方程的常见问题

田文娟
应县第一中学校，山西 朔州 037600

[摘要]在高中数学新课标教材中,对于《极坐标与参数方程方程》的学习是在选修 4-4。因为有些直线、圆锥曲线的问题用直角坐标表示和解决极其复杂、困难。但用极坐标与参数方程就简单容易了不少,所以用极坐标与参数方程解题是一种重要的方法,同时也有助于培养和提高学生运用数学和解决实际问题的能力,因此,对于它们常见问题的研究就变得十分必要了。

[关键词]极坐标方程；参数方程；直角坐标方程
DOI：10.33142/fme.v1i3.3053　　中图分类号：G633.3　　文献标识码：A

A brief analysis of common problems of polar coordinates and parametric equations

Tian Wenjuan
Yingxian No.1 Middle School, Shuozhou, Shanxi 037600, China

Abstract: In the new curriculum textbook of high school mathematics, the study of Polar Coordinates and Parametric Equations is an elective course of 4-4. Because some problems of straight line and conic curve are very complicated and difficult to be expressed and solved with rectangular coordinates. However, it is much easier to solve problems with polar coordinates and parametric equations, so it is an important method to solve problems with polar coordinates and parametric equations, and also helps to cultivate and improve students' ability to apply mathematics and solve practical problems [1]. Therefore, it becomes very necessary to study their common problems.

Keywords: polar coordinate equation; Parametric equation; Rectangular coordinate equation

引言

在《极坐标与参数方程》这部分，教材中简单的介绍了直线、圆锥曲线的极坐标与参数方程，内容比较浅显，所涉及的知识点和题型难度系数都不大[1]，因此，大部分同学并不能理解和掌握，但是我们每年高考卷中，选做题都有极坐标与参数方程这道题，而且，大部分同学也会选择做这道题，对于直线、圆锥曲线这些我们必修课本是进行了深入的研究和讲解，所以大部分同学在遇到用极坐标方程、参数方程表示的直线、圆锥曲线的问题时，都会转化成直角坐标方程来求解。但有时，用极坐标与参数方程直接来解决就更加简单、容易了，因此，用极坐标方程与参数方程解题不仅仅是一种重要的解题方法也能够使数学学科理论更加完整、全面，同时拓展了学生的思维、提高了学生的能力，所以，对于研究极坐标与参数方程的常见问题就非常有必要了[2]。

1 极坐标方程、参数方程与直角坐标方程的互化

例 1. 在直角坐标系中，曲线C_1的参数方程是$\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 是参数）。

在极坐标系中，曲线C_2 的极坐标方程是$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$。写出$C_1$，$C_2$ 的直角坐标方程。

解：由曲线C_1的参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 是参数）得

$\begin{cases} \cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{3}} \\ \sin\alpha=y \end{cases}$，消去参数有$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，

所以曲线C_1 的直角坐标方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

由曲线C_2 的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$ 得

$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta=2\sqrt{2}$，即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=4$。

所以 $x+y=4$，即 $x+y-4=0$。

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$。

例 2. 在直角坐标系中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（φ 是参数），曲线 C_2 的方程是 $x^2+y^2-2y=0$，求出曲线 C_1、C_2 的极坐标方程。

解：由于曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

根据 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 有曲线 C_1 的极坐标方程是 $\rho^2=\frac{2}{1+\sin^2\theta}$；

由于曲线 C_2 的直角坐标方程是 $x^2+y^2-2y=0$，

则曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2\sin\theta$。

规律总结：

在解决曲线的极坐标方程与直角坐标方程互化问题时，对于简单的我们可以直接代入公式 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$x^2+y^2=\rho^2$，但有时需要作一些变化，如将式子的两边同时平方、同时乘以 ρ 等，同时 ρ，θ 的取值范围；

在解决参数方程与普通方程的互化问题时，常用的消参方法有代入消元、加减消元、平方加减消元等，常用到的公式有 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$，同时注意 x，y 的取值范围。

2 利用极坐标方程，参数方程的几何意义解题

例 3. 在直角坐标系中，圆 C 的方程是 $(x+6)^2+y^2=25$。

（1）写出圆 C 的极坐标方程；

（2）直线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 是参数），直线 L 与曲线 C 交与 A，B 两点且 $|AB|=\sqrt{10}$，写出直线 L 的斜率。

解：（1）由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 可得圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+12\rho\cos\theta+11=0$。

（2）由（1）知，直线 L 的极坐标方程是 $\theta=\alpha$（$\rho\in R$）。

设点 A，B 对应的极坐标是 (ρ_1,α)，(ρ_2,α)，把直线 L 的方程代入圆 C 的方程有 $\rho^2+12\rho\cos\alpha+11=0$。

则有 $\rho_1+\rho_2=-12\cos\alpha$，$\rho_1\rho_2=11$。

$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=\sqrt{144\cos^2\alpha-44}$。

由于 $|AB|=\sqrt{10}$ 得 $\cos^2\alpha=\frac{3}{8}$，$\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$。

所以直线 L 的斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{15}}{3}$。

例 4. 在直角坐标系中，直线 L 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 是参数）且倾斜角是 α（$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$），在极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho\cos^2\theta-4\sin\theta=0$。

（1）求直线 L 与曲线 C 的直角坐标方程；

（2）已知点 P（1，0），若点 M 的极坐标为 $(1,\dfrac{\pi}{2})$，直线 L 经过点 M 且与曲线 C 相交于 A，B 两点，设线段 AB 的中点为 Q，求 $|PQ|$ 的值。

解：（1）因为直线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 是参数），

所以直线 L 的直角坐标方程为 $y=\tan\alpha(x-1)$。

由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta-4\sin\theta=0$ 得 $\rho^2\cos^2\theta-4\rho\sin\theta=0$，

即 $x^2-4y=0$，所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2=4y$。

（2）因为点 M 的极坐标为 $(1,\dfrac{\pi}{2})$，所以点 M 的直角坐标为 $(0,1)$，

所以 $\tan\alpha=-1$，直线 L 的倾斜角 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$。

所以直线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数），代入 $x^2=4y$，得 $t^2-6\sqrt{2}t+2=0$。

设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，因为 Q 为线段 AB 的中点，

所以点 Q 对应的参数值为 $\dfrac{t_1+t_2}{2}=\dfrac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$，

又点 P $(1,0)$，则 $|PQ|=\left|\dfrac{t_1+t_2}{2}\right|=3\sqrt{2}$。

例 5. 曲线 C_1 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$，曲线 C_2 的极坐标方程是 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 是参数）。

（1）把曲线 C_1 的极坐标方程转化成直角坐标方程；

（2）直线 L 与曲线 C_2 交于点 A，B，且 $|AB|=\sqrt{14}$，求出直线 L 的倾斜角 α 的值。

解：（1）由曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$。

因为 $x^2+y^2=\rho^2$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x=0$，即 $(x-2)^2+y^2=0$。

（2）将曲线 C_2 的极坐标方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ 代入曲线 C_1 的方程得

$(t\cos\alpha-1)^2+(t\sin\alpha)^2=4$，化简得 $t^2-2t\cos\alpha-3=0$。

设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，

则 $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2\cos\alpha \\ t_1 t_2 = -3 \end{cases}$，

所以 $|AB| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t} = \sqrt{4\cos^2\alpha + 12} = \sqrt{14}$，

所以 $4\cos^2\alpha = 2$，$\cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ 或 $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$。

规律总结：

在解决极坐标方程与曲线交点、距离、线段长、面积等几何问题时，我们可以利用极坐标中 ρ 的几何意义求解；在解决与圆、圆锥曲线上动点有关的问题时，我们可利用直线的参数方程的标准式中 t 的几何意义求解。

3 利用极坐标方程、参数方程求最值

例 6. 在直角坐标系中，曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 是参数），在极坐标系中，直线 L 的极坐标方程是 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$。

（1）求曲线 C 和直线 L 的直角坐标方程；

（2）求曲线 C 上的点到直线 L 距离的最小值。

解：（1）因为 $-1 < \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \le 1$，且 $x^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$，

则曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$（$x \ne -1$），

根据 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ 有直线 L 的直角坐标方程是 $2x + \sqrt{3}y + 11 = 0$。

（2）设曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 是参数，$-\pi < \alpha < \pi$），

那么曲线 C 上的点到直线 L 的距离为

$$d = \frac{|2\cos\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha + 11|}{\sqrt{7}} = \frac{4\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + 11}{\sqrt{7}},$$

当 $\alpha = -\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$4\cos(\alpha - \dfrac{\pi}{3}) + 11$ 取得最小值 7，

所以曲线 C 上的点到直线 L 距离的最小值为 $\sqrt{7}$。

例 7. 在直角坐标系中，曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 是参数），在极坐标系中，曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho\cos^2\theta = \sin\theta$。

（1）写出曲线 C_1 的极坐标方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）过原点且倾斜角为 α（$\dfrac{\pi}{6} < \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$）的射线 L 与曲线 C_1，C_2 分别相交于 A，B 两点（A，B 异于原点），求 $|OA| \cdot |OB|$ 的

取值范围。

解：（1）曲线C_1的直角坐标方程为$(x-2)^2+y^2=4$，即$x^2+y^2-4x=0$，

那么曲线C_1的极坐标方程是$\rho^2=4\rho\cos\theta$，故$\rho=4\cos\theta$。

因为曲线C_2得极坐标方程是$\rho\cos^2\theta=\sin\theta$，则有$\rho^2\cos^2\theta=\sin\theta$，

即曲线C_2的直角坐标方程是$x^2=y$。

（2）由于射线 L 的参数方程是$\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 是参数，$\frac{\pi}{6}<\alpha\le\frac{\pi}{4}$），

把其代入曲线C_1的直角坐标方程有$t^2-4t\cos\alpha=0$，

解得$t_1=0$，$t_2=4\cos\alpha$。故$|OA|=|t_2|=4\cos\alpha$。

同理可得$|OB|=\frac{\sin\alpha}{\cos^2}$，

所以$|OA|\cdot|OB|=4\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos^2}=4\tan\alpha$，

因为$\frac{\pi}{6}<\alpha\le\frac{\pi}{4}$，所以$|OA|\cdot|OB|$的取值范围是$(\frac{4\sqrt{3}}{3},4]$。

规律总结：

在利用极坐标方程、参数方程求最值时，我们常转化为三角函数的最值问题。

以上三种题型就是我们在高中阶段用极坐标方程、参数方程解决的三种常见题型。

4 结束语

总之，极坐标与参数方程单就考查内容来说，一般是直线、圆、椭圆的三种方程（普通方程、参数方程、极坐标方程）的互化，在教学中，教师可以借助微课阅读，现代教育技术，利用计算机展现曲线的美，感受数学的无穷魅力[3]。

[参考文献]

[1]红庆,陶友根,马俊.极坐标系与参数方程的题型及解题策略分析[J].中学数学教学参考旬刊,2018(6):41-44.
[2]倪淑雯.极坐标与参数方程解题策略及教学建议[J].中学教研数学版,2020(4):13-18.
[3]王希红.注重解后反思 寻求最优解法——一道极坐标和参数方程题的多种解法[J].教学考试,2018(29):29-31.

作者简介：田文娟（1987.10-），女，山西朔州应县人，汉族，研究生学历，教师，从事数学教学专业。

广彩文化的视觉应用思考与设计实践

陈美欢
广州美术学院，广东 广州 510260

[摘要]绚彩华丽、金碧辉煌的广彩艺术，承载着深厚的历史遗韵和文化底蕴，面对国内外创新思潮的不断冲击之下，借力现代设计对传统文化的艺术传承与创新方面更是大势所趋；尤其运用视觉和传播手段为广彩文化在持续发展、传承保护和创新实践方面，有效地寻找符合当今社会审美和应用推广的方法更是亟需突破的关键。此文重点即着重梳理广彩文化的历史沿革和发展现状，以相关文献和理论与案例为研究基础，试图在文化挖掘和形式应用方面，探索广彩文化在视觉设计和实践的可行性。
[关键词]广彩文化；视觉应用；设计实践
DOI：10.33142/fme.v1i3.3050　　中图分类号：G633　　文献标识码：A

Visual Application Thinking and Design Practice of Guangcai Culture

CHEN Meihuan
Guangzhou Academy of Fine Arts, Guangzhou, Guangdong, 510260, China

Abstract: Guangcai art, which is gorgeous and resplendent, carries profound historical and cultural heritage. In the face of the continuous impact of domestic and foreign innovative ideas, it is the trend of the times to rely on modern design to inherit and innovate traditional culture. In particular, the use of visual and communication means can effectively promote the sustainable development, inheritance protection and innovative practice of Guangcai culture. It is the key to find a way to meet the aesthetic and application promotion of today's society. This paper focuses on combing the historical evolution and development status of Guangcai culture. Based on relevant literature, theory and cases, this paper attempts to explore the feasibility of Guangcai culture in visual design and practice in terms of cultural mining and form application.
Keywords: Guangcai culture; visual application; design practice

1 广彩文化的历史发展概况

1.1 广彩历史沿革

广彩作为一种因应外销需求而兴起的陶瓷品种，它的产生和发展与广州在中西贸易史上的独特地位紧密相关。清政府自 1684 年（清康熙廿四年）正式开海，设立粤、闽、浙、江等四个口岸准许对外通商，来华贸易的外国商船也随之增多；而经历了文艺复兴洗礼的欧洲人偏爱华瓷，在广州订货或来样加工，从而促进了广彩瓷的生产和发展；至 1757 年（乾隆廿二年）实行海禁之后，广州成为当时唯一通商口岸，商业繁盛的对外贸易加速并形成了广彩瓷器的独特风格。尤其在 1778 年（清乾隆四十三年），广彩的行会组织——灵思堂的成立，标志着广彩行业的发展以规范化、规模化的生产机制和运营模式走向世界。因此，在清代的外销瓷器出口历史中，广彩瓷器以 63%出口份额的辉煌成绩成为“十八世纪欧洲的宠儿”，被誉为“世界官窑”；而广彩瓷器在以广州为主要出口通道的中外贸易和文化交往当中，其萌芽初创到全盛发展的过程，亦是“南海丝绸之路”的重要组成部分和历程见证。然而，随着 18 世纪末欧洲诸东印度公司的倒闭，影响了广彩瓷器的贸易需求，以及 20 世纪二十年代，广彩瓷业开始逐步转向港澳地区发展，包括广州在抗战爆发后于 1938 年沦陷，贸易的中断对广彩瓷业的生产和发展造成了很大的影响，许多广彩从业人员相继移居或转行，广彩行业跌入谷底，直至新中国成立后，才使得广彩在上世纪五六十年代得以渐渐复苏。2008 年，广彩技艺被列入“第二批国家级非物质文化遗产名录”，在非遗文化的推展和普及之下，人们开始重新认识广彩的历史文化内涵，对见证了中西文化交流，能代表岭南地区重要人文发展的广彩瓷器有了全新的认识。

1.2 广彩工艺特征

广彩（Kwon-Glazed Porcelain），是广州地区釉上彩瓷艺术的简称，亦称“广东彩”、“广州织金彩瓷”，是在白瓷器皿上进行绚彩华丽的装饰，采用低温釉上彩装饰技法烧制而成的特色工艺品；在作为外销瓷的 300 多年历史中，广彩是中西方不同绘画艺术风格的结合体，这种文化的交融使得广彩在构图、色彩、纹样都与中国传统的陶瓷装饰产生

　