

三自由度系统微振动的可视化研究

郑怡¹ 韩毓锦² 杨伟俊¹ 姜雅阁¹ 李俊¹ 郑兴荣^{1*}

1. 陇东学院 新能源学院, 甘肃 庆阳 745000

2. 陇东学院 数学与信息工程学院, 甘肃 庆阳 745000

[摘要]基于理论力学和结构振动理论,运用分析动力学方法,研究讨论了三自由度系统及其微振动的相关特性。借助 MATLAB 软件及其快速傅里叶变换功能对系统的位置、速度、位移、频率及其在频率进行数值仿真。结果表明:三自由度系统的微振动特性受到简振频率、系统质点位移和振型等参数的影响,其中质点的质量及劲度系数的取值变化对最终的结果也会产生影响,不同的参数组合会导致不同的振动特性。这与理论分析结果完全吻合。因此,在实际应用中,可以根据实际具体情况选择合适的参数组合,以达到最优的微振动效果。

[关键词]三自由度系统;微振动;矩阵法;位移响应;简振频率;可视化

DOI: 10.33142/nsr.v2i4.18712

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

Visualization Research on Micro-vibration of Three-degree-of-freedom Systems

ZHENG Yi¹, HAN Yujin², YANG Weijun¹, LOU Yage¹, LI Jun¹, ZHENG Xingrong^{1*}

1. School of New Energy, Longdong University, Qingyang, Gansu, 745000, China

2. College of Mathematics and Information Engineering, Longdong University, Qingyang, Gansu, 745000, China

Abstract: Based on theoretical mechanics and structural vibration theory, this study investigates the relevant characteristics of the three-degree-of-freedom system and its micro-vibration by employing analytical dynamics methods. Numerical simulations of the system's position, velocity, displacement, and frequency characteristics were conducted using MATLAB software and its fast Fourier transform (FFT) function. The results indicate that the micro-vibration characteristics of the three-degree-of-freedom system are affected by parameters such as natural frequency, system particle displacement, and vibration mode. Among these, changes in the values of particle mass and stiffness coefficient also exert an influence on the final results, and different parameter combinations lead to distinct vibration characteristics. This is fully consistent with the results of theoretical analysis. Therefore, in practical applications, an appropriate parameter combination can be selected according to specific practical conditions to achieve the optimal micro-vibration effect.

Keywords: three-degree-of-freedom system; micro-vibration; matrix method; displacement response; natural frequency; visualization

引言

微振动是指振幅微小、频率覆盖范围较宽的振动现象,其振幅一般处于微米(μm)甚至纳米(nm)量级,区别于日常可见的大幅机械振动,广泛存在于精密制造、航空航天、船舶、生物医学等领域^[1-5],其测量与控制是高精尖技术的核心环节之一。随着半导体、航空航天等领域对精度要求的提升,微振动控制正朝着更高精度(纳米级)、更广频段(覆盖超低频和高频)、智能化(自适应控制算法)方向发展^[6,7],例如结合人工智能的振动预测与主动补偿技术,已成为高端装备研发的关键突破点。物体或结构体发生微小的振动(微振动),会对设备或结构体的性能和寿命产生影响。因此,研究微振动及其相关特性显得

尤为重要。

三自由度系统及其微振动问题作为理论力学中的一个基本问题,是所有微机电系统(MEMS)等精密仪器元件的理论基石,它由三个自由度的振动构成,通常由两个平行板和一个悬挂在中间的质点组成^[8-10]。三自由度系统微振动及其控制被广泛应用于各行各业,并得到了快速应用。三自由度系统及其元件的微振动特性是当前一个重要的研究方向。研究者们通过理论分析、数值模拟和实验验证等方法,探究了三自由度元件的振动模态、固有频率、阻尼特性等微振动特性。同时,还研究了三自由度元件的制造工艺、尺寸优化、材料选择等方面,以提高其微振动性能和应用效果^[11-14]。总的来说,三自由度元件的研究对

于机电系统的发展和具有重要的意义,未来还有很大的研究空间和应用前景。

基于此,本文理论力学和结构振动理论,系统性地研究了三自由度系统中的微振动问题。首先利用矩阵方法求解三自由度系统的本征值,再求解耦合的微分方程的解。通过 MATLAB 软件对方程求数值解,画出质点的位置、速度和位移曲线图,对数值解作频谱分析得出本征频率;使用拉普拉斯变换法解方程的解析解值,得到了相关特性的可视化图形。

1 理论模型与推导

微振动问题的探讨求解,就是体系在平衡位置附近作往返有限小位移的周期运动。

在三自由度系统中,设劲度系数均为 k 的两弹簧连接三个质点,其中两端的质点质量分别都为 m ,中间质点的质量为 M 。设在时间 t 为零时,各质点初速度 v_0 为零,以图 1 所示的三个质点相对自身平衡位置的位移 x_1, x_2, x_3 作为三自由度振动系统的广义坐标^[8,9]。

如图 1 所示,根据理论力学和结构振动理论,利用拉格朗日方法^[8],得到三自由度系统的运动微分方程为:

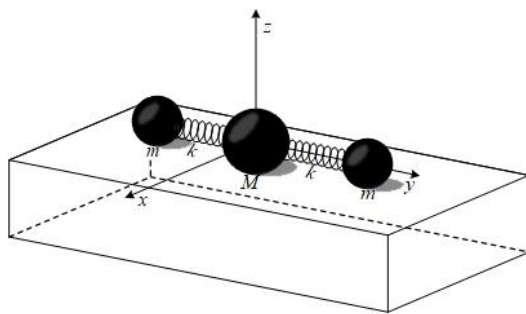
$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2) = 0 \\ M \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0 \\ m \frac{d^2 x_3}{dt^2} + k(x_3 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

这是典型的二阶常微分方程组,其解的一般形式为:

$$x_i = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2)$$

根据矩阵表示法,以上二阶常微分方程组的矩阵形式可写为:

$$S \frac{d^2}{dt^2} X + KX = 0 \quad (3)$$



(a) 三维模型图

其中:

$$S = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

代入上式后,得到矩阵形式的方程为:

$$(K - S\omega^2)A = 0 \quad (4)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

即得:

$$\begin{cases} (k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (2k - M\omega^2)A_2 - kA_3 = 0 \\ -kA_2 + (k - m\omega^2)A_3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

因为矩阵 A 是非零矩阵,所以由公式 (4) 可知:

$$K - S\omega^2 = 0 \quad (6)$$

即:

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ -k & 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

通过求解,得到三个简正频率,分别为:

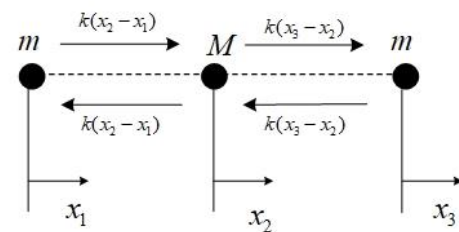
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

将简正频率分别代入上式,可得到三个与之对应的本征矢量,即:

(1) 对 $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, 本征矢量为:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \\ -A_{11} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中 A_i 表示第 i 个质点第 1 个简正频率的振幅,所以三自由度系统的简正模式下的振动方程为:



(b) 示意图

图 1 三自由度系统的微振动模型和受力示意图

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases} \quad (8)$$

(2) 对 $\omega_2 = 0$, 本征矢量为:

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12} \\ A_{12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

同理, 得到简正模式下的振动方程为:

$$\begin{cases} x_1 = A_{12} \cos \varphi_2 \\ x_2 = A_{12} \cos \varphi_2 \\ x_3 = A_{12} \cos \varphi_2 \end{cases} \quad (10)$$

三个质点的位移相同, 系统作纯平动。

(3) 对 $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} (1 + \frac{2m}{M})}$, 本征矢量为:

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{13} \\ -\frac{2m}{M} A_{13} \\ A_{13} \end{bmatrix} \quad (11)$$

第三个简正模式的运动学方程为:

$$\begin{cases} x_1 = A_{13} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \\ x_2 = -\frac{2m}{M} A_{13} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \\ x_3 = A_{13} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{cases} \quad (12)$$

公式 (8) (10) (12) 是三个简正模式下的三自由度系统的运动方程, 所以整个系统的简正模式运动的通解为:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos \varphi_2 + A_{13}(\omega_3 t + \varphi_3) \\ x_2 = A_{12} \cos \varphi_2 - \frac{2m}{M} A_{13} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \\ x_3 = -A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos \varphi_2 + A_{13}(\omega_3 t + \varphi_3) \end{cases} \quad (13)$$

式中积分常数 A_{11} , A_{21} , A_{31} 和 φ_1 , φ_2 , φ_3 由初始条件确定。

2 三自由度系统特性的数值仿真与结果讨论

为了方便获取数值仿真结果并进行比较, 文中在计算时的参数设置如下: $m=3\text{kg}$, $M=4\text{kg}$, $k=50\text{N/m}$ 。

2.1 三自由度系统的位置速度仿真

在三自由度系统的微振动中, 两个弹簧振子发生平动或转动形成了类似于正、余弦函数的波动。结合理论模型 (运动微分方程、简正频率公式) 推导, 利用 MATLAB 软件进行数值仿真, 得到了三自由度系统中三个质点的位移曲线, 如图 2 所示。

图 2 直观呈现了系统中不同质点随时间变化的位移响应规律。该图聚焦研究通过位移曲线的波动规律, 间接

反映了系统本征频率 ω_1 , ω_3 对位移响应的影响; 为后续“快速傅里叶变换 (FFT) 频谱分析”提供原始位移数据。从图中可以看出, 三条位移曲线 (x_1 , x_2 , x_3) 均呈现“周期性波动”, 符合理论中“系统运动是三个简正模式叠加”的结论, 曲线的波动由低频频率 ω_1 和高频频率 ω_3 共同主导, 且中间质点 x_2 的位移波动幅度与两端质点 x_1 , x_3 存在差异。 x_1 与 x_3 的位移曲线呈“反向对称”趋势 (如某时刻 x_1 向上波动时, x_3 向下波动), 印证了低阶简正模式 (ω_1) 中“两端质点反相位、中间质点静止”的振型特点。

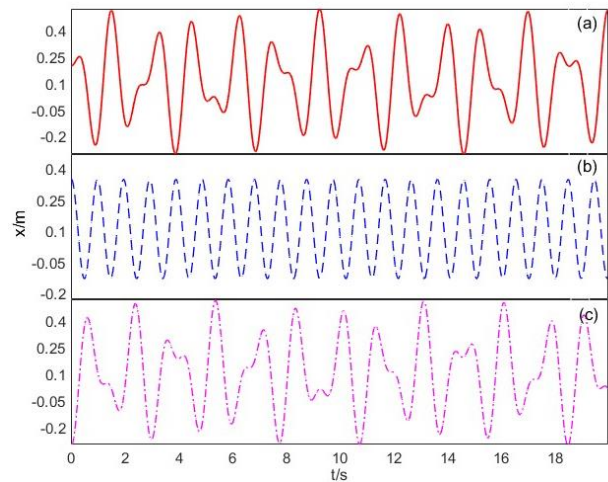


图 2 三质点位移曲线图。(a) 表示左边质点 m, (b) 表示中间质点 M, (c) 表示右边质点 m

2.2 三自由度系统质点的频谱

质点的功率谱图是通过快速傅里叶变换 (FFT) 对三自由度系统中质点的位移信号进行频谱分析后绘制的功率谱密度图。通过 FFT 将质点的位移时域信号转换到频域, 分析其频率成分, 目的是从数值仿真数据中提取系统的本征频率 (固有频率), 验证理论推导的正确性, 如图 3 所示。

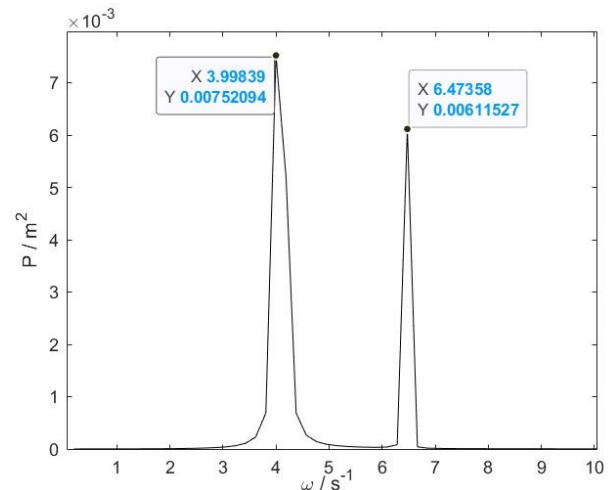


图 3 质点的功率谱图

从图中可以得到，功率谱峰值对应本征频率，图中出现两个明显的峰值，分别对应系统中两个非零的本征频率 ω_1 和 ω_3 ，其值分别为 3.9984 和 6.4736，与理论计算值 ($\omega_1=4.0825$ 、 $\omega_3=6.4550$) 基本吻合，验证了数值仿真的准确性。功率谱中没有其他显著峰值，说明系统振动主要由这两个频率模式主导，符合三自由度系统的振动特性。峰值高度反映了对应频率模式在振动中的能量贡献大小。

2.3 固定频率旋转曲线

利用 MATLAB 对微分方程组 (13) 进行拉普拉斯变换，然后求解变换所得的方程组，最后将解作逆变换，得出原微分方程组的解。以参数组合 $m=3\text{kg}$ ， $M=4\text{kg}$ ， $k=50\text{N/m}$ 为例，代入拉普拉斯变换法求得的方程的解析解中，可以得到包括耦合模式振动和两种简正模式运动，如图 4 分别是耦合模式下的频率为 $\omega_1=4.0825$ 和频率为 $\omega_3=6.4550$ 的定频率三维旋转动画与二维平面图。

图 4 是拉普拉斯变换法数值仿真得到的定频率三维旋转动画图和定频率旋转曲线图，旨在对比展示耦合振动

模式与两种简正模式的视觉差异。通过定频率旋转动画或特定频率下的运动轨迹，直观区分不同振动模式的特征，验证理论推导的简正频率 ($\omega_1=4.0825$ 和 $\omega_3=6.4550$) 在实际运动中的表现。从图中可以得出，在单一频率激励下，系统呈现清晰的简正振动形态： ω_1 模式下，两端质点反相运动，中间质点静止（节点）； ω_3 模式下，两端质点同相运动，中间质点反相运动。耦合模式下运动轨迹更为复杂，是两种简正模式的线性叠加。通过观察运动周期，可直观验证理论计算频率的正确性。

2.4 参数对系统本征频率影响的数值仿真

以参数组合 $m=3\text{kg}$ 、 $M=4\text{kg}$ 、 $k=50\text{N/m}$ 为例，本研究并验证三自由度系统微振动的理论模型与数值方法的合理性和有效性。三自由度系统的动力学特性由质量 m 、 M 与弹簧劲度系数 k 共同决定，通过构建质量比 $r = \frac{M}{m}$ （反映系统内部质量分布）和劲度系数 k 的二维参数空间，探究各参数及其耦合关系对系统本征频率的影响规律，对参数空间全面梳理不同参数搭配，开展系统性的定量研究。

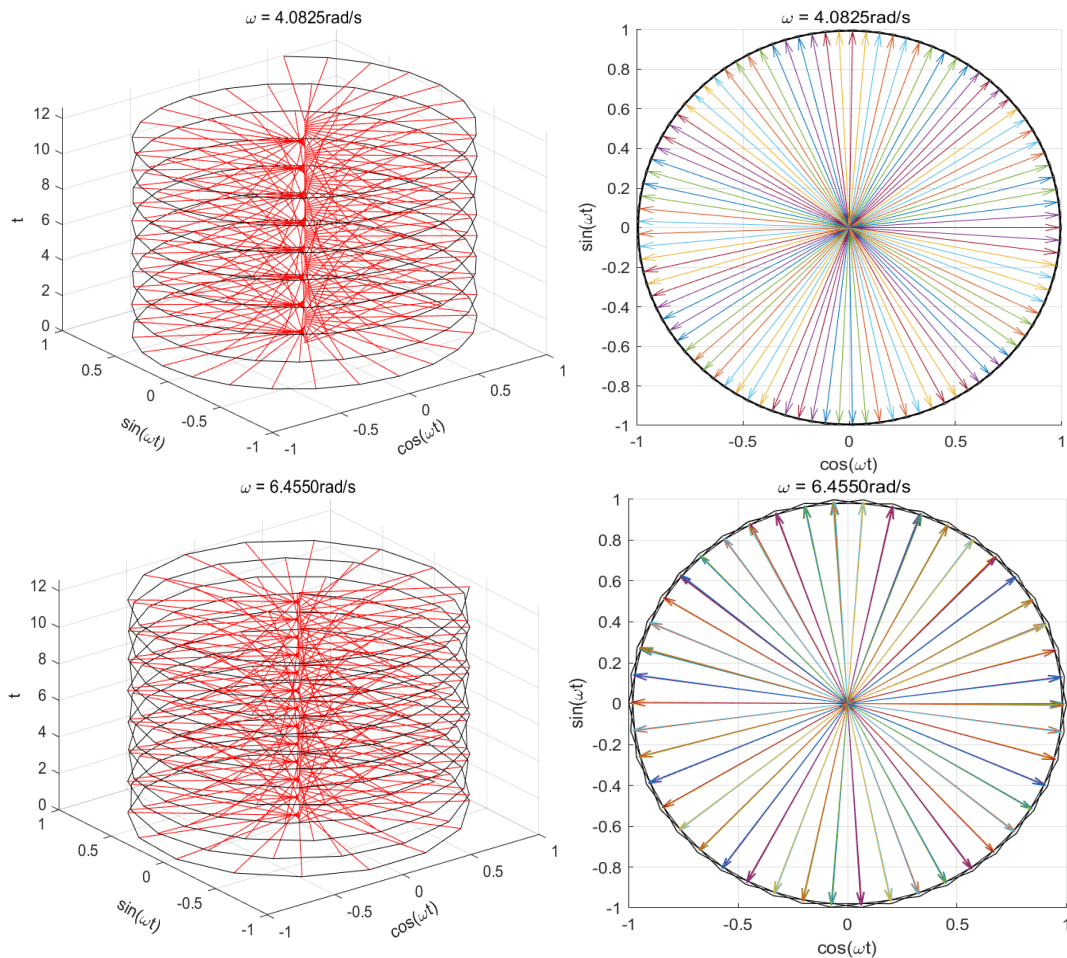


图 4 两种不同频率下的定频率旋转曲线图

(1) 固定质量比 r 时，劲度系数 k 的变化对系统的影响

固定质量比 $r=0.5, 1, 2, 5, 10$ ，数值仿真得到本征频率 ω_1, ω_3 随 k 的变化规律，如图 5 所示。

由图 5 可得，在任意固定的质量比 r 下， ω_1, ω_3 均随 k 的增大而递增，与单自由度系统频率变化趋势一致，频率与 \sqrt{k} 呈强线性相关 ($R^2 > 0.999$)，满足 $\omega \propto \sqrt{k}$ 的近似关系。 r 对频率曲线具有调节作用， ω_1 的曲线族近乎重合，表明低阶频率对中间质量变化不敏感； ω_3 的曲线族随 r 的增大而递增，但曲线族整体下移，表明高阶频率随中间质量增大显著降低。直观展示刚度系数 k 对频率的影响规律。

(2) 固定劲度系数 k 时，质量比 r 的变化对系统的影响

固定劲度系数 $k=50, 100, 200, 500\text{N/m}$ ，数值仿真得到本征频率 ω_1, ω_3 随 r 的变化规律，如图 6 所示。

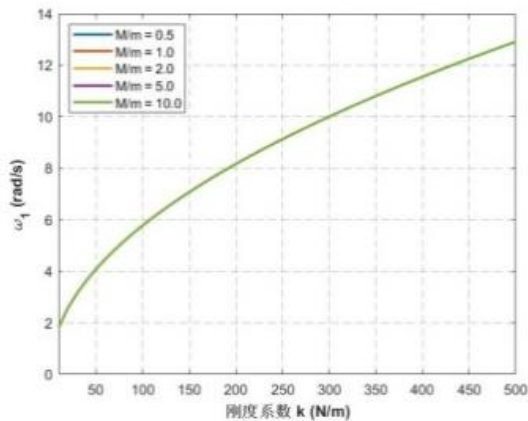
由上图 6 可得，低阶频率 ω_1 几乎不随 r 变化，两端质点反相位振动，中间质点近似节点，频率主要由端部质

点质量 m 和刚度 k 决定，与中间质点质量 M 无关；高阶频率 ω_3 随 r 增大单调递减，且具有渐近特性： $r \rightarrow 0$ 时 ω_3 趋近上限值；劲度系数 k 仅对频率曲线进行整体纵坐标缩放，不改变其随 r 的变化趋势。

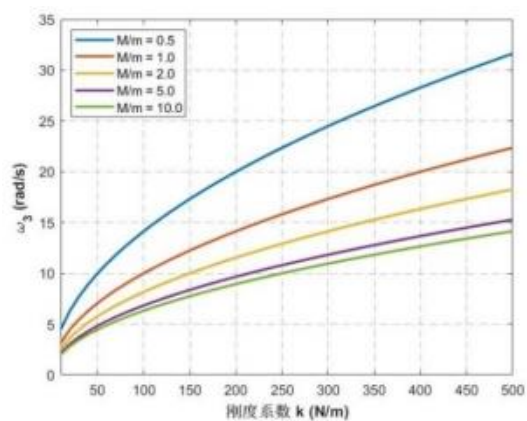
(3) 参数耦合效应与灵敏度分析

图 7 展示的是系统本征频率 ω_1, ω_3 如何随质量比 r 和劲度系数 k 变化的三维可视化结果。通过研究本征频率 ω_1, ω_3 在二维参数空间 (r, k) 中的全局变化规律，直观呈现 ω_1, ω_3 对参数质量比 r 和劲度 (刚性) 系数 k 的敏感程度差异，为参数优化设计提供可视化依据。

有图 7 可知， ω_1 响应面沿 k 轴陡升、沿 r 轴平坦，证实其主要受 k 控制，对 r 不敏感； ω_3 响应面为复杂倾斜曲面，在 r 小、 k 大的区域取最大值，在 r 大或 k 小的区域值较低，表明其受 r, k 共同调控。灵敏度量化结果显示， ω_1 对 k 的灵敏度远高于 r ， ω_3 对两个参数均具有较高灵敏度，且对 k 的灵敏度更高， $S_r^{\omega_3}$ 为负则印证 ω_3 随 r 增大而减小。

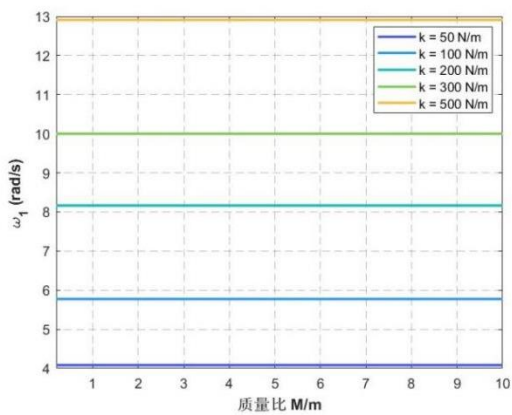


(a) ω_1 随 k 的变化

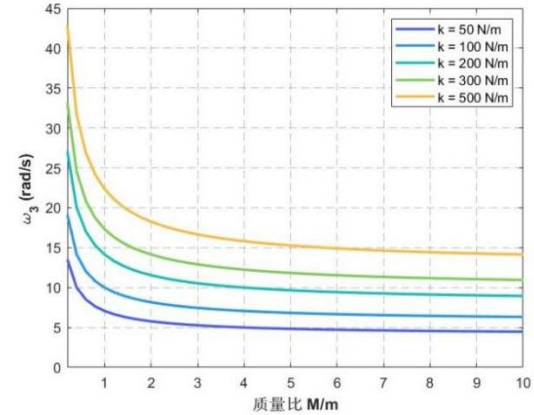


(b) ω_3 随 k 的变化

图 5 固定质量比时 ω_1, ω_3 随劲度系数 k 的变化规律

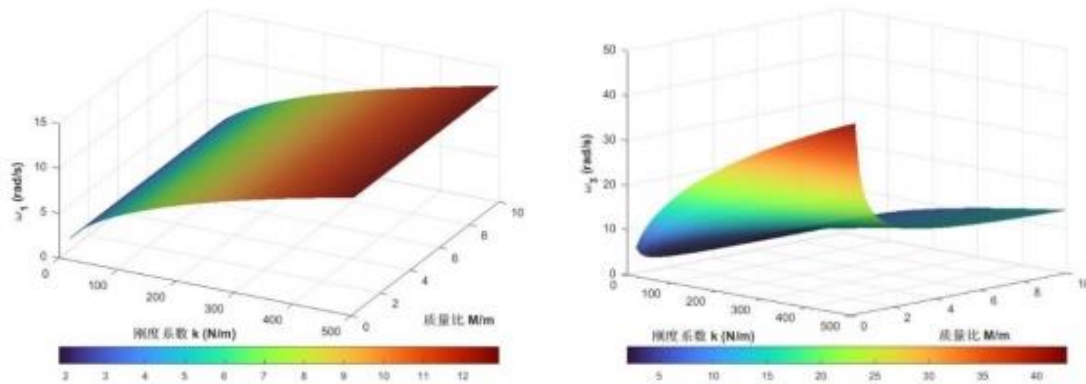


(a) ω_1 随质量比 r 的变化



(b) ω_3 随质量比 r 的变化

图 6 固定劲度系数 k 时 ω_1, ω_3 随质量比 r 的变化规律


 (a) ω_1 的参数空间响应面

 (b) ω_3 的参数空间响应面

 图7 ω_1, ω_3 的参数空间响应

3 结论

通过理论推导与数值仿真相结合的方式,对三自由度系统微振动问题展开研究,得出以下结论:基于拉格朗日方法推导得到系统运动微分方程,求解出三个简正频率及对应本征矢量,系统通解为三个简正模式的线性叠加;借助 MATLAB 软件和拉普拉斯变换法进行数值仿真,得到的质点位移曲线呈现周期性波动、频谱峰值对应的本征频率与理论计算值基本吻合,固定频率旋转曲线直观展现了不同简正模式的振动特征,验证了理论模型与数值方法的合理性。参数影响研究表明,本征频率 ω_1 和 ω_3 均随弹簧劲度系数 k 增大而递增, ω_1 对质量比 r 不敏感、主要受 k 控制, ω_3 随 r 增大单调递减且受 r 与 k 共同调控,其对 k 的灵敏度更高,相关可视化结果为系统参数优化设计提供了依据。

基金项目:陇东学院 2025 年校级教育教学改革研究项目(LYJG2025B31),甘肃省 2025 年学校思想政治工作课题(2025XXSZGZYBKT075),甘肃省自然科学基金(23JRRM0755)。

[参考文献]

- [1]罗青,于涛,张激扬,等.采用磁悬浮飞轮的航天器微振动主动抑振方法研究[J].振动与冲击,2025,44(24):246-258.
- [2]薛家宝,杨帅,黄顺舟,等.高精度航天器微振动地面试验研究进展[J].航天器环境工程,2025,42(6):591-605.
- [3]滕飞,张宇飞,李勇,等.卫星用高频微角振动测量敏感器设计、验证与在轨应用[J].空间控制技术与应用,2025,51(6):97-107.
- [4]马永琦,熊玉勇,李丁洋,等.基于毫米波微振动感知的心

音及心率变异性探测技术与试验研究[J].振动与冲击,2025,44(17):41-47.

- [5]崔凯,刘朝晖,谢友金,等.空间精密运动机构微振动传递特性试验与分析[J].宇航学报,2025,46(7):1446-1455.
 - [6]童园梦,岳建勇,贾京.激光装置基础微振动控制设计及现场试验研究[J].地震工程与工程振动,2025,45(6):30-39.
 - [7]李斌.多自由度低频微振动隔离系统辨识与振动主动控制研究[D].黑龙江:哈尔滨工业大学,2025.
 - [8]彭芳麟,胡静,管靖,等.用 MATLAB 解决线性三自由度系统微振动问题[J].大学物理,2001(11):31-34.
 - [9]林星翰.多自由度微振动控制方法研究[J].中国科技信息,2022(22):109-110.
 - [10]刘瑞金.多自由度微振动的研究[J].淄博学院学报(自然科学与工版),2000(3):4-8.
 - [11]潘孟美.用矩阵方法处理 3 自由度系统的微振动[J].海南师范学院学报(自然科学版),2005(3):233-236.
 - [12]徐丹,萨茹拉.用 Mathematica 求解线性 3 自由度系统微振动问题[J].物理通报,2015(3):35-37.
 - [13]王晓军,杨国军,黄春英.多自由度系统微振动数态的仿真实现研究[J].广东技术师范学院学报,2008(12):1-3.
 - [14]柏宁丰,孙小蕊,冯进军,等.金属电磁带隙波导色散特性分析[J].东南大学学报(自然科学版),2007(5):761-765.
- 作者简介:郑怡,女,甘肃天水,主要从事量子物理和理论物理的仿真模拟研究;*通讯作者:郑兴荣,男,甘肃天水人,教授,主要从事凝聚态理论物理与新能源、半导体材料计算、仿真的研究。