

文克勒模型在弹性地基梁配筋计算中的应用

——以某高位水池底板配筋计算为例

杨奇^{1,2} 肖海³

1 中国电建集团贵阳勘测设计研究院有限公司, 贵州 贵阳 550081

2 中国水电顾问集团贵阳勘测设计研究院岩土工程有限公司, 贵州 贵阳 550081

3 三峡大学 三峡库区地质灾害教育部重点实验室, 湖北 宜昌 443002

[摘要] 文章利用文克勒模型对弹性地基梁的计算过程进行详细介绍, 并结合水池底板的结构受力、挠度及裂缝宽度等计算, 初步阐明了文克勒模型在弹性地基梁结构配筋计算中的应用, 为类似工程提供一定的参考和借鉴, 也为工程的设计、施工及后期运行维护管理起到一定的理论支撑。

[关键词] 文克勒模型; 基础梁; 配筋

DOI: 10.33142/hst.v3i3.1960

中图分类号: TU399

文献标识码: A

Application of Winkler Model in Reinforcement Calculation of Elastic Foundation Beam

——A Case Study of Reinforcement Calculation of Bottom Slab of A High Level Pool

YANG Qi^{1,2}, XIAO Hai³

1 Power China Guiyang Engineering Corporation Limited, Guiyang, Guizhou, 550081, China

2 HydroChina Guiyang Engineering Corporation Geotechnical Engineering Company Limited, Guiyang, Guizhou, 550081, China

3 Key Laboratory of Geological Hazards on Education Ministry of Three Gorges Reservoir Area, China Three Gorges University, Yichang, Hubei, 443002, China

Abstract: The article uses the Winkler model to give a detailed introduction to the calculation process of the elastic foundation beam. Combined with the calculation of the structural force, deflection and crack width of the pool floor, the application of the Winkler model in the calculation of the structural reinforcement of the elastic foundation beam is initially clarified, which provides certain reference and reference for similar projects, as well as plays a certain theoretical support for the design, construction and later operation and maintenance management of the project.

Keywords: Winkler model; foundation beam; reinforcement

1867年捷克工程师文克勒(WINKLER)提出地基上任意一点所受的压力强度 P 与该点的地基沉降量 S 成正比的假设^[1], 即 $P=KS$, K 为基床反力系数。该模型由于假设简单, K 值测试方便, 因此被广泛采用。对于水池等蓄水建筑物而言, 结构的受力变形及开裂情况对建筑物的安全运行起到至关重要的作用。利用文克勒模型, 可较为方便的计算出水池底板(按弹性地基梁考虑时)的变形及受力情况, 对工程的设计、施工及后期运行维护管理起到一定的理论支撑作用。

1 项目基本情况

某供水工程高位水池底板为40cm厚的C30钢筋砼, 底板尺寸为12.8m×12.8m, 底板中间为以独立柱, 设计水水位时池内水深为2.8m。所受的荷载主要为柱传递来的荷载, 池内水压以及自重荷载。

2 荷载条件

考虑的荷载有: ①底板自重 G_1 (第一类永久荷载) ②柱传递荷载 Q_1 (第一类永久荷载) ③池内水压荷载 Q_2 (一般可变荷载)

1) 底板自重 G_1 :

计算时取钢筋混凝土的重度为 25kN/m^3 , 取单宽1m, 沿水池横向取块长计算条块。因此底板自重标准值为: $G_1 = \gamma_c bH$ 。式中: γ_c —钢筋混凝土的容重, 为 25kN/m^3 ;

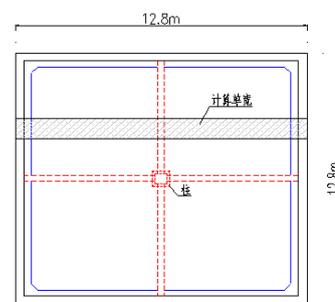


图1 水池底板俯视图

b—所取计算条块宽度，单宽 $b=1\text{m}$ ；H—截面计算高度，m。底板自重标准值 $G_{1k}=25 \times 1 \times 0.4=10\text{kN/m}$ ，设计值 $G_{1s}=10 \times 1.05=10.5 \text{ kN/m}$ 。

2) 柱传递荷载 Q_1 ：

根据柱的内力计算，柱传递集中力荷载标准值为 $Q_{1k}=172.36\text{kN}$ ，柱传递集中力荷载设计值为 $Q_{1s}=190.03\text{kN}$ 。

3) 池内水压荷载 Q_2 ：

池内水压荷载按设计水位时池内水深 2.8m 计算，公式为： $p=\rho_w gH$ 。式中：H—设计水位时对应的池内水深， $H=2.8\text{m}$ ； ρ_w —水的密度，取为 1000kg/m^3 ； g —重力加速度，取为 9.8N/kg 。

$p=1000 \times 9.8 \times 2.8=27.44 \times 10^3\text{N/m}^2=27.44\text{kPa}$ ，横向取单宽计算时，水压对底板产生的荷载标准值 $Q_{2k}=p \times b=27.44 \times 10^3 \times 1=27.44 \times 103\text{N/m}=27.44\text{k N/m}$ 。水压对底板产生的荷载设计值 $Q_{2s}=1.2Q_{2k}b=1.2 \times 27.44=32.93\text{k N/m}$ 。

3 基础梁类别判断

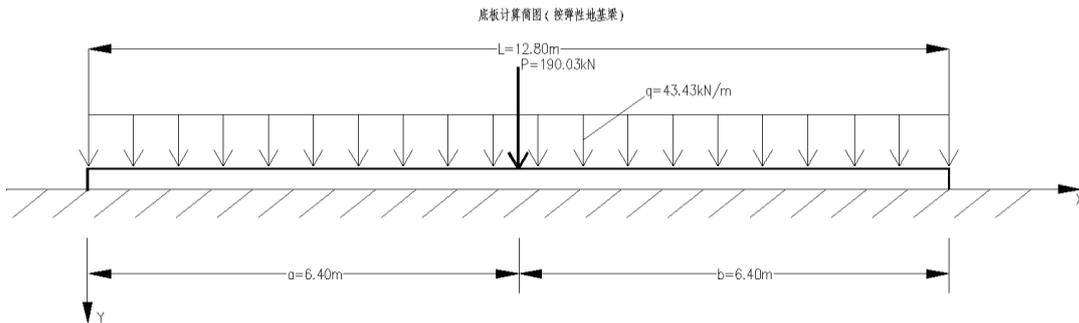


图 2 地基梁的尺寸表示

其特征系数 β 可由下式进行计算^[2]： $\beta=[k_0 b_0 / (4EI)]^{0.25}$ 式中： E —基础梁的弹性模量，在平面应变情况下， E 应换为 $E/(1-\nu^2)$ ， ν 为梁的泊松比，取 $\nu=0.167$ ， $E=3.0 \times 10^4 (\text{N/mm}^2)^{[3-4]}$ ； I —基础梁的截面惯性矩，基础梁高 $h=0.4\text{m}$ ， $I=b_0 h^3 / 12=1 \times 0.4^3 / 12=0.0053\text{m}^4$ ； b_0 —基础梁的截面宽度，单宽为 1m ； k_0 —地基的垫层系数^[2]，水池底板基岩为软质岩石，查表取为 $30 \times 10^4\text{kN/m}^3$ ； β —基础梁特征系数；计算 $\beta=[3 \times 10^8 \times 1 / (4 \times 3.0 \times 10^{10} \times 0.0053)]^{0.25}=0.8287$ ， $\beta a = \beta b = 0.8287 \times 6.40 = 5.304 > \pi$ ，可当作无限长梁进行计算。

4 内力计算

无限长梁在集中荷载和均布荷载，无限长梁在集中力荷载下的弯矩方程^[2]： $M(x) = \frac{P}{4\beta^2} \phi_1(\beta x)$ 。式中： $M(x)$ —计算点 x 的弯矩值； P —集中力荷载值，为 190.03kN ； β —基础梁的特征系数， 0.8287 ； a, b — A 点距离梁的左端和右端的距离， $b=12.8-a$ ； ϕ_1 —双曲三角函数， $\phi_1(\beta x) = e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x)$ ，其中 x 单位为弧度。将已知数据代入上式得：

$$M(x) = \frac{P}{4\beta^2} e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x) = \frac{190.03}{4 \times 0.8287^2} \times e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x)$$

， $x < 0$ 时，取 x 的绝对值。

为了求出弯矩最大值，根据上述函数绘制出弯矩图（图 3），最大弯矩值出现在 $x=0$ 处，弯矩最大值为 69.18kN m 。

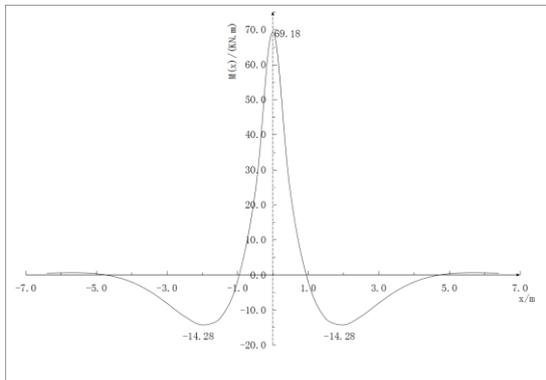


图 3 集中荷载下弯矩图

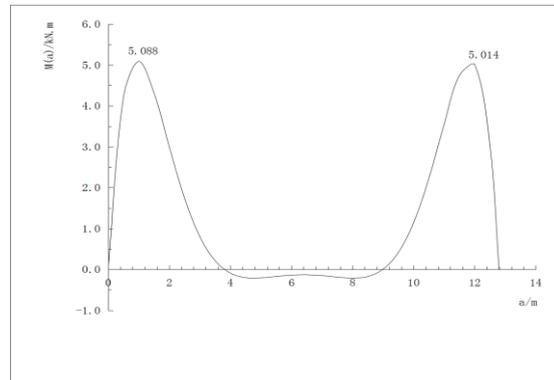


图 4 均布荷载下弯矩图

无限长梁的均布荷载的弯矩方程为^[2]: $M_A = \frac{q}{4\beta^2} [\phi_1(\beta a) + \phi_1(\beta b)]$ 。式中: M_A —计算点 A 的弯矩值; q —均布荷载值, 为 43.43kN/m; β —基础梁的特征系数, 0.8287; a, b —A 点距离梁的左端和右端的距离, $b=12.8-a$; ϕ_1 —双曲三角函数, $\phi_1(\beta x) = e^{-\beta x} \sin \beta x$ 。将已知数据代入上式得:

$$M_A(a) = \frac{q}{4\beta^2} [\phi_1(\beta a) + \phi_1(\beta b)] = \frac{q}{4\beta^2} [e^{-\beta a} \sin \beta a + e^{-\beta b} \sin \beta b]$$

$$= \frac{43.43}{4 \times 0.8287^2} \{e^{-0.8287a} \sin(0.8287a) + e^{-0.8287(12.8-a)} \sin[0.8287(12.8-a)]\}$$

为了求出弯矩最大值, 根据上述函数绘制出弯矩图(图 4), 最大弯矩值在 $a=1.0\text{m}$ 处, 弯矩最大值为 5.088 kN m。根据上述计算结果, 将弯矩荷载叠加, 可知在底板梁中间处, 即 $a=0\text{m}$ 处产生的弯矩最大,

$$M_{\max} = 69.18 - 0.13 = 69.05 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5 配筋计算及验算

5.1 配筋计算

板厚 $h=400\text{mm}$, 根据《水工混凝土结构设计规范》^[3]水池底板最小配筋率为 0.15%, 根据《水工混凝土结构设计规范》^[3]混凝土保护层最小厚度为 30mm, 厚取 $a=50\text{mm}$, 单位宽 $b=1000\text{mm}$, 双层配筋, 所以截面的有效高度 $h_0=h-a=400-50=350\text{mm}$ 。

截面抵抗矩系数:

$$\alpha_s = \frac{KM}{f_c b h_0^2} = \frac{1.15 \times 69.05 \times 10^6}{14.3 \times 1000 \times 350^2} = 0.0453$$

相对受压区高度:

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_s} = 1 - \sqrt{1 - 2 \times 0.00787} = 0.0464 < \xi_b = 0.518$$

所以, 受拉钢筋面积为(受拉筋为 III 级钢筋)

$$A_s = \frac{f_c \xi b h_0}{f_y} = \frac{14.3 \times 0.0464 \times 1000 \times 350}{360} = 645.09(\text{mm}^2)$$

$$A_s = 645.09(\text{mm}^2) > \rho_{\min} b h_0 = 0.15\% \times 1000 \times 350 = 525(\text{mm}^2)$$

经计算, 选用 6 Φ 16@200, III 级钢, $A_s=1206 \text{ mm}^2$, 满足最小配筋率。

5.2 配筋验算

在集中荷载标准值作用时, 弯矩为:

$$M(x) = \frac{P}{4\beta^2} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) = \frac{172.36}{4 \times 0.8287^2} \times e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$$

从图中得出最大弯矩值为 62.75kN m (图 5)。

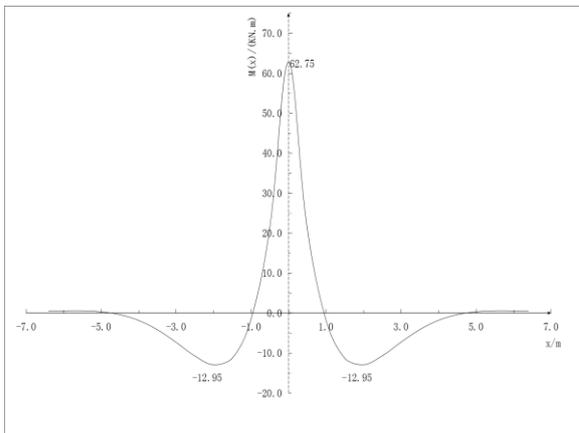


图 5 集中荷载下弯矩图

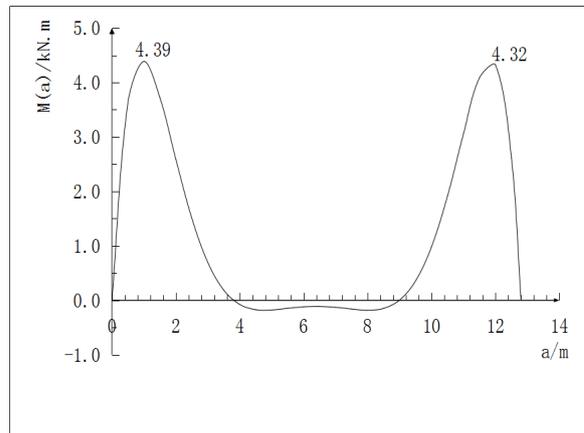


图 6 均布荷载下弯矩图

在均布荷载标准值作用时，弯矩为：

$$M_A(a) = \frac{q}{4\beta^2} [\phi_4(\beta a) + \phi_4(\beta b)] = \frac{q}{4\beta^2} [e^{-\beta a} \sin \beta a + e^{-\beta b} \sin \beta b]$$

$$= \frac{43.43}{4 \times 0.8287^2} \{e^{-0.8287a} \sin(0.8287a) + e^{-0.8287(12.8-a)} \sin[0.8287(12.8-a)]\}$$

为了求出弯矩最大值，根据上述函数绘制出弯矩图(图6)，得出最大弯矩值在 a=1.0m 处，弯矩最大值为 4.39kN·m。根据上述计算结果，将弯矩荷载叠加，可知在底板梁中间处产生的弯矩最大，

$$M_{\max} = 62.75 - 0.11 = 62.64 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

a) 裂缝宽度计算

水池底板的工作环境为三类环境，根据《水工混凝土结构设计规范》^[3]，裂缝最大宽度限值 $[\omega_{\text{lim}}] = 0.25\text{mm}$ 。荷载标准值下，最大裂缝宽度

$$\omega_{\max} = \alpha \frac{\sigma_{\text{sk}}}{E_s} \left(30 + c + 0.07 \frac{d}{\rho_{\text{te}}} \right) = 2.1 \times \frac{170.58}{2 \times 10^5} \left(30 + 50 + 0.07 \frac{16}{0.03} \right) = 0.21 \text{ mm} < [\omega_{\text{lim}}] = 0.25 \text{ mm}$$

因此，水池底板按 6 Φ 16 ($A_s = A'_s = 1206 \text{ mm}^2$ ，单宽范围)，即对整个水池底板而言，竖向按照 Φ 16@200 进行配筋时，裂缝宽度要求。

b) 挠度计算

无限长梁在集中力荷载下的位移方程^[2]： $y(x) = \frac{P\beta}{4k_0 b_0} \phi_3(\beta x)$ 。式中： $y(x)$ —计算点 x 的位移值；P—集中力荷载值，为 172.36kN； β —基础梁的特征系数，0.8287； b_0 —基础梁的截面宽度； ϕ_3 —双曲三角函数， $\phi_3(\beta x) = e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x)$ 。

将已知数据代入上式得：

$$y(x) = \frac{P\beta}{4k_0 b_0} \phi_3(\beta x) = \frac{172.36 \times 0.8287}{4 \times 3 \times 10^4 \times 1.0} e^{-8287x} (\cos 8287x + \sin 0.8287x)$$

, $x < 0$ 时，取 x 的绝对值。

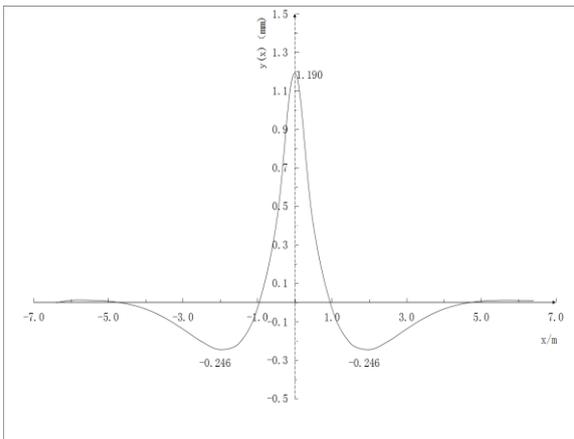


图7 集中荷载位移曲线图

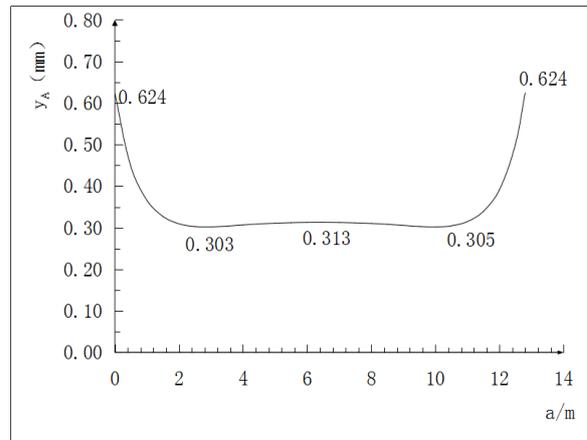


图8 均布荷载位移曲线图

根据上述函数绘制出位移曲线(图7)，无限长梁的均布荷载的位移方程为： $y_A = \frac{q}{2k_0 b_0} [2 - \phi_2(\beta a) - \phi_2(\beta b)]$ 。

式中： y_A —计算点 A 的位移值；q—均布荷载标准值，为 37.44kN/m； β —基础梁的特征系数，0.8287；a, b—A 点距离

梁的左端和右端的距离, $b=12.8-a$; ϕ_2 —双曲三角函数, $\phi_2(\beta x) = e^{-\beta x} \cos \beta x$ 。将已知数据代入上式得:

$$y_A = \frac{q}{2k_0 b_0} [2 - \phi_2(\beta a) - \phi_2(\beta b)]$$
$$= \frac{37.44}{2 \times 3 \times 10^4 \times 1.0} [2 - e^{-0.8287a} \cos 0.8287a - e^{-0.8287(12.8-a)} \cos 0.8287(12.8-a)]$$

根据上述函数绘制出位移曲线(图8)。对上述两组位移进行叠加, 荷载标准值组合下最大挠度:

$$f_s = 1.190 + 0.313 = 1.503 \text{ mm} < 32 \text{ mm} (l_0/400), \text{ 故挠度满足要求。}$$

综合以上配筋计算情况, 水池底板采用对称配筋, 选用 $6\Phi 16$ ($A_s = A'_s = 1206 \text{ mm}^2$, 单宽范围), 即对整个水池底板而言, 横向、竖向按照 $\Phi 16@200$ 进行配筋。

6 结论

1) 根据集中荷载和均布荷载单独作用下的挠度曲线可以看出, 集中荷载对弹性地基梁挠度的影响主要集中在集中荷载作用点, 而均布荷载对弹性地基梁挠度的影响主要集中在均布荷载作用范围边缘。因此, 在施工及后期运行维护过程中, 要根据结构物所受荷载实际情况, 应重点加强荷载对结构物影响显著的关键部位的管控。

2) 利用文克勒模型计算弹性地基梁快速便捷、计算结果较为直观, 但该模型未考虑地基中的剪力, 因此对比较重要的建筑物进行计算时, 应结合其他计算模型进行互补验证。

[参考文献]

- [1] 龙驭球. 弹性地基梁的计算[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.
- [2] 周氏等. 水工混凝土结构设计手册[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1999.
- [3] SL191-2008. 水工混凝土结构设计规范[S]. 2008
- [4] 河海大学等. 水工钢筋混凝土结构学(第4版)[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.

作者简介: 杨奇(1987-), 男, 硕士, 工程师, 主要从事水利及生物岩土方面的设计及施工管理工作。